# Sistemi Lineari

Si considerano sistemi di 2 o più equazioni

Le equazioni sono per lo più in 2 incognite (rette)

Non si fa uso della teoria dei sistemi lineari (Rouchè-Capelli, Cramer etc)

Si possono considerare anche eq. in 3 incognite (piani)

Premessa:

Quando si risolve un sistema si cerca una soluzione comune a diverse equazioni, ovvero

cercare $\bar{x}$ soluzione di $\begin{cases} f_1(x)=0 \\ \cdots \\ f_m(x)=0 \end{cases} \iff$ cercare $\bar{x} \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m$

dove $A_1 = \{x : f_1(x)=0\}$ --- $A_m = \{x : f_m(x)=0\}$

Un sistema lineare nelle variabili $x, y$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

ha come soluzioni $\underbrace{\ }_{\text{se ne esistono}}$ le coppie $(x,y)$ che sono soluzioni simultaneamente di entrambe le eq.

ovvero

$(x,y)$ soddisfa $(*)$ <u>se</u> $(x,y) \in A \cap B$ ove

$A = \{(x,y) : a_1x + b_1y + c_1 = 0\}$

$B = \{(x,y) : a_2x + b_2y + c_2 = 0\}$

$A$ e $B$ sono grafici di rette: noi sappiamo che due rette possono essere

- tra loro parallele, e quindi $A \cap B = \emptyset$
- " " incidenti, e quindi $A \cap B = \{(\bar{x},\bar{y})\}$ 1 solo punto
- coincidenti, " " $A \cap B = A$ $\infty$ soluzioni

Se consideriamo invece un sistema di 3 equazioni in due incognite

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases} \quad (**)$$

cercare le soluzioni (se ne esistono) equivale a determinare $(x,y)$ che soddisf. $(**)$ $\iff$ $(x,y)\in A\cap B\cap C$

dove $A=\{(x,y): a_1x+b_1y+c_1=0\}$
$B=\{(x,y): a_2x+b_2y+c_2=0\}$
$C=\{(x,y): a_3x+b_3y+c_3=0\}$

Qui si presentano diversi casi
- se le tre rette non tra loro distinte, $\emptyset$ punti in comune
- se due rette coincidono e non // alla terza, $\emptyset$ " " "
- se due rette coincidono e incidono la terza, 1 " " "
- se le tre rette coincidono, $\infty$ punti in comune.

Per determinare le soluzioni di un sistema si può procedere
- per sostituzione (ricavo $x$, $y$, nella 1ª eq e sostituisco in 2ª)
- per riduzione

N.B. il procedimento di riduzione consiste nel prendere due equazioni $r$ e $s$, farne la combinazione lineare $t=\lambda r+(1-\lambda)s$, e considerare $\begin{cases} r \\ t \end{cases}$ (o $\begin{cases} s \\ t \end{cases}$) in luogo del sistema (equivalente) di partenza $\begin{cases} r \\ s \end{cases}$

geometricamente
- prendo le due rette (se il sistema è di 2 equazioni) $r$ ed $s$
- considero il fascio generato da queste $\lambda r+\mu s$ al variare di $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
- fisso un valore $\bar\lambda,\bar\mu$ opportuno e prendo la retta $\bar t=\bar\lambda r+\bar\mu s$
- considero il sistema $\begin{cases} r \\ \bar t \end{cases}$ (oppure $\begin{cases} s \\ \bar t \end{cases}$) e questo sistema ha, ovviamente, le stesse soluzioni di quello di partenza.

**Esercizio 2.14** : risolvete i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} ax+y=1 \\ 2x+ay=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-3y=7 \\ x+y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y=1 \\ 2x+z=2\,. \end{cases}$

a) $\begin{cases} y=-x+1 \\ y=-\frac{3}{2}x+1 \end{cases}$ si vede che le due rette hanno $\neq$ coefficiente angolare

$\Rightarrow$ sono incidenti e quindi $\exists!$ soluzione che è

$\begin{cases} -\frac{3}{2}x+1=-x+1 \\ y=-x+1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{2}=0 \\ y=-x+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

In alternativa

$\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ 3x+2y-2=0 \end{cases}$

ed ora si può prendere $\lambda(x+y-1)+\mu(3x+2y-2)=0$ quando $\bar{\lambda}=3$ e $\bar{\mu}=1$ trovando la nuova equazione $\cancel{3x}+3y-3-\cancel{3x}-2y+2=0 \Leftrightarrow y-1=0$ e possiamo rimpiazzare per esempio $3x+2y-2=0$ con la nuova equazione $y=1$ trovando

$\begin{cases} x+y-1=0 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-3y=7 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ y=\frac{1}{3}x-\frac{7}{3} \\ y=-x+1 \end{cases}$ le tre rette sono distinte, quindi $\nexists$ punti in comune

$\begin{cases} y=-2x \\ x+6x=7 \\ x-2x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ 7x=7 \\ -x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$ IMPOSSIBILE

In alternativa si può osservare che

$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-3y=7 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} y=-2x \\ x-3y=7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ x-2x=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} y=-2x \\ x+6x=7 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

e questo è impossibile, in quanto i due sistemi hanno soluzioni $\neq$

Questo sistema può essere studiato con il metodo di riduzione

c) $\begin{cases} ax+y=1 \\ 2x+ay=2 \end{cases}$ dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro

Il caso $a=0$ $\begin{cases} y=1 \\ 2x=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ ovvero $\exists!$ soluzione

Quando $a \neq 0$ il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} y=-ax+1 \\ y=-\frac{2}{a}x+2 \end{cases}$$

e questo ha 1! soluzione quando $-\frac{2}{a} \neq -a$ ovvero $\forall a \neq \pm\sqrt{2}$, e questa soluzione è data

$$\begin{cases} -\frac{2}{a}x+2=-ax+1 \\ y=-ax+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x\left(a-\frac{2}{a}\right)=-1 \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{a}{a^2-2} \\ y=+\frac{a^2}{a^2-2}+1 \end{cases} \quad \forall a \neq \pm\sqrt{2}$$

c) $\begin{cases} ax+y=1 \\ 2x+ay=2 \end{cases}$

Quando $a=+\sqrt{2}$ il sistema diventa

$$\begin{cases} +\sqrt{2}x+y=1 \\ 2x+\sqrt{2}y=2 \end{cases} \iff \begin{cases} +\sqrt{2}x+y=1 \\ \sqrt{2}x+y=\sqrt{2} \end{cases}$$

e questo sistema è impossibile poiché le rette sono // e $\neq$

Quando $a=-\sqrt{2}$

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x+y=1 \\ 2x-\sqrt{2}y=2 \end{cases} \iff \begin{cases} -\sqrt{2}x+y=1 \\ -\sqrt{2}x+y=-\sqrt{2} \end{cases}$$

e questo sistema è impossibile poiché le rette sono // e $\neq$

d) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y\quad =1 \\ 2x+z\quad =2 \end{cases}$

In questo caso sto intersecando tre piani. La teoria dice che 3 piani in posizione generica (ovvero 2 di essi non sono // tra loro e i 3 piani sono $\neq$) hanno 1 punto in comune

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+4y\quad =2 \\ 2x\quad +z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y\quad =2 \\ 2x+4y\quad =2 \\ 2x\quad +z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-2y=4 \\ 2x+4y=2 \\ 2x+z\quad =2 \end{cases}$ $\begin{cases} -6y=2 \\ 2x+4y=2 \\ 2x+z=2 \end{cases}$

$\begin{cases} y=-\frac{1}{3} \\ x=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3} \\ z=2-2\cdot\frac{5}{3}=-\frac{4}{3} \end{cases}$

In alternativa si può risolvere il sistema con il metodo di sostituzione