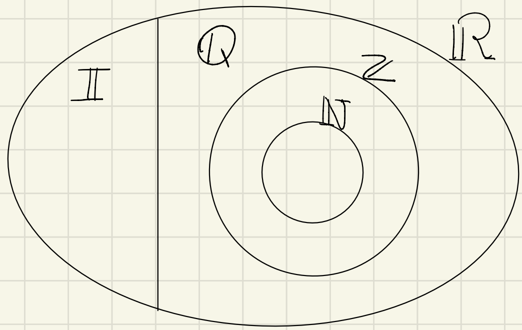
Seconda lezione - Algebra e sistemi lineari

I NUMERI REALI $\mathbb{R}$



$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ NATURALI

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$ RELATIVI

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \ a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ RAZIONALI

↓

N° DECIMALI FINITI O PERIODICI

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

↳ IRRAZIONALI es. $\sqrt{2}, \pi, e, \dots$

↓

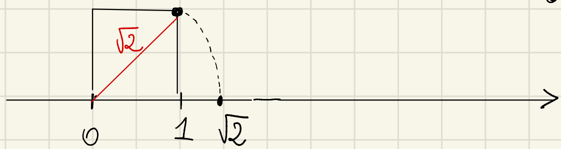
RAPPR. DECIMALE ILLIM. E NON PERIODICA

$\mathbb{R}$ È COMPLETO:

A OGNI NUMERO RAZIONALE CORRISPONDE UN PUNTO SULLA RETTA MA CI SONO PUNTI A CUI NON CORRISPONDE NESSUN NUMERO RAZIONALE.

ES.

$d = l \cdot \sqrt{2}$



I NUMERI REALI COMPLETANO LA RETTA: A OGNI PUNTO SULLA RETTA CORRISPONDE UN SOLO N° REALE E A OGNI N° REALE CORRISPONDE UN SOLO PUNTO SULLA RETTA

$\hookrightarrow$ $\mathbb{R}$ E' COMPLETO.

PROPRIETÀ DELLA SOMMA IN $\mathbb{R}$

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(a, b) \mapsto a+b$$

1) COMMUTATIVA: $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x+y = y+x$

2) ASSOCIATIVA: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x+y)+z = x+(y+z)$.

3) $\exists$ EL. NEUTRO 0 : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x+0 = 0+x = x$

4) $\exists$ EL. OPPOSTO: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists\ y = -x \in \mathbb{R}$
TALE PER CUI $x+y = y+x = 0$

PROPRIETÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE IN $\mathbb{R}$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

1) COMMUTATIVA

2) ASSOCIATIVA

3) $\exists$ EL. NEUTRO 1

4) $\exists$ EL. INVERSO:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists\, y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

TALE PER CUI $x \cdot y = y \cdot x = 1$.

PROPRIETÀ

1) DISTRIBUTIVA: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z = z \cdot x + z \cdot y = z \cdot (x+y).$$

2) ORDINE TOTALE: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ VALE SOLO UNA DELLE SEGUENTI

$$x < y \quad \vee \quad x = y \quad \vee \quad x > y$$

O ESCLUSIVA

L'ORDINE SODDISFA I SEGUENTI ASSIOMI:

(i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.

(ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \leq y,\ z \geq 0$

$$\Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$$

3) 0 È EL. ASSORBENTE DELLA MOLTIPLICAZIONE:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

RISOLVERE EQUAZIONI IN $\mathbb{R}$:

SI PROCEDE UTILIZZANDO

1) $x \underbrace{+a}_{} = b \Rightarrow x + a - a = b - a$

$x + a + (-a) = b + (-a)$

$\Rightarrow x = b - a \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$

2) $x \underbrace{\cdot a}_{} = b \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} x \cdot a \cdot \frac{1}{a} = b \cdot \frac{1}{a}$

$\Rightarrow x = \frac{b}{a} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$

ES. $(a+1)x - 7a = 2a - 3x \qquad x = ?$

$ax + x - 7a = 2a - 3x$

$+3x \; +7a \qquad\qquad +3x + 7a$

$ax + x + 3x = 2a + 7a$

$x\,(a + 1 + 3) = 9a$

$x\,(a+4) = 9a \qquad \Rightarrow \quad x = \frac{9a}{a+4} \qquad \forall a \neq -4.$

$a \neq -4 \qquad \cdot \frac{1}{a+4} \qquad \cdot \frac{1}{a+4}$

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO (LAP)

$a \cdot b = 0 \iff a = 0$ oppure $b = 0$

CHE EQUIVALE A

$a \cdot b \neq 0 \iff a \neq 0$ e $b \neq 0$

ES. $x^2+x-6=0$ $\quad S: +1 \quad P: -6$

$$(x+3)(x-2)=0$$

$$\overset{LAP}{\Rightarrow} \quad x+3=0 \quad \vee \quad x-2=0$$

$$\Rightarrow \quad x=-3 \quad \vee \quad x=2$$

ES. $x^2-5x+7=1$ $\quad \to$ SCOMPOSIZIONE

$\to$ FORMULA RISOLUTIVA

$x^2-5x+6=0$

$(x-3)(x-2)=0$

$x=3 \ \vee \ x=2$

$\Delta = (-5)^2-4\cdot 1\cdot 6 = 25-24=1$

$x_{1,2} = \dfrac{+5\pm\sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$ ✓

ES. $x^6-3x^3+2=0$

EQ. BIQUADRATICA

$$t := x^3 \quad \to \quad t^2-3t+2=0$$

$$\Rightarrow \quad (t-2)(t-1)=0 \quad \Rightarrow \quad t=2 \quad \vee \quad t=1$$

$$\Rightarrow \quad x^3=2 \quad \vee \quad x^3=1 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt[3]{2} \quad \vee \quad x=1.$$

PROP. DELLE POTENZE

$\forall A,B>0$

$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

1) $A^\alpha \cdot A^\beta = A^{\alpha+\beta}$
2) $A^\alpha \cdot B^\alpha = (A\cdot B)^\alpha$
3) $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\cdot\beta}$

ES. ORDINARE I SEGUENTI NUMERI:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} < \frac{3}{\sqrt[3]{2}}, \qquad \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{4}} > \frac{\sqrt[4]{3}}{4}$$

$$\frac{3^{1/2}}{2^{1/3}} \qquad \frac{3}{2^{1/3}} \qquad \frac{3^{1/4}}{4^{1/3}} \qquad \frac{3^{1/4}}{4}$$

(V)

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} < \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \leftarrow \text{STESSO DEN. } 3 > \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{4}} > \frac{\sqrt[4]{3}}{4} \leftarrow \text{STESSO NUM. } 4 > \sqrt[3]{4}$$

CONFRONTO $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ e $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{4}}$: SUPPONGO

CHE $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} < \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{4}}$

$$\Rightarrow \sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{2}$$

PROP. INVARIANTIVA

$$\Leftrightarrow \sqrt[2\cdot 6]{3^6} \cdot \sqrt[3\cdot 4]{4^4} < \sqrt[4\cdot 3]{3^3} \cdot \sqrt[3\cdot 4]{2^4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[12]{3^6 \cdot 4^4} < \sqrt[12]{3^3 \cdot 2^4}$$

$$\Leftrightarrow 3^6 \underbrace{4^4}_{2^8} < 3^3 \cdot 2^4 \quad \Leftrightarrow 3^6 \cdot 2^8 < 3^3 \cdot 2^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^6}{3^3} < \frac{2^4}{2^8} \quad \Leftrightarrow 3^3 < \frac{1}{2^4}$$

$$\Leftrightarrow 3^3 \cdot 2^4 < 1 \quad \Leftrightarrow 9 \cdot 16 < 1 \quad \text{FALSO}$$

QUINDI $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \boxed{>} \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{4}}$

ORDINE DECRESCENTE:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \boxed{>} \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{4}} > \frac{\sqrt[4]{3}}{4}$$

TEOREMA DI RUFFINI

DATO UN POLINOMIO $P(x)$ DI GRADO n, SE $P(a) = 0 \Rightarrow \exists\, Q(x)$ DI GRADO $n-1$ TALE PER CUI

$$P(x) = Q(x)(x-a)$$

$Q(x)$: QUOZIENTE DELLA DIVISIONE $P(x) : (x-a)$

ES. $\underbrace{x^3+5x^2+7x\boxed{+3}}_{P(x)} = 0$ DIVISORI DI $+3$: $\pm 1, \pm 3$

$n = 3$

$$P(+1) = 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 + 3 \neq 0$$

$$P(-1) = (-1)^3 + 5(-1)^2 + 7(-1) + 3 = -1 + 5 - 7 + 3 = 0$$

ESEGUO $P(x) : (x-(-1)) = P(x) : (x+1)$

→ REGOLA DI RUFFINI

→ DIVISIONE TRA POLINOMI

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +5x^2 & +7x & +3 & x+1 \\ \cline{5-5} -x^3 & -x^2 & & & x^2+4x+3 \\ \cline{1-4} & +4x^2 & +7x & +3 & \\ & -4x^2 & -4x & & \\ \cline{1-4} \end{array}$$

x^2+4x+3: $Q(x)$

$$
\begin{array}{r|}
0 \quad +3x+3 \\
-3x-3 \\
\hline
0
\end{array}
$$

RESTO $\longrightarrow$ 0

$$P(x) : (x+1) = x^2+4x+3$$

$$(x^3+5x^2+7x+3) : (x+1) = x^2+4x+3$$

$$8 : 4 = 2 \iff 8 = 4 \cdot 2$$

$$
\begin{aligned}
x^3+5x^2+7x+3 &= (\underline{x^2+4x+3})(x+1) \\
&= (\underline{(x+3)(x+1)})(x+1) \\
&= (x+3)(x+1)^2
\end{aligned}
$$

$$x^3+5x^2+7x+3=0 \iff (x+3)\cdot(x+1)^2=0$$

$$\overset{\text{LAP}}{\iff} x+3=0 \quad \vee \quad (x+1)^2=0$$

$$\iff x=-3 \quad \vee \quad x=-1 .$$

ESERCIZI

1) DIRE QUALI DELLE SEGUENTI SONO CORRETTE:

a) $\dfrac{x^{\frac{3}{\cancel{2}}x}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{2x}{3}$ F

b) $\dfrac{2+\cancel{x}\,2}{2y} = \dfrac{1+x}{y}$ F

c) $\dfrac{\sqrt{3(1+a^2)}}{\sqrt{3}} = \sqrt{1+a^2}$ F

d) $\dfrac{x}{x} = 1 \quad \forall x \neq 0$

2) SEMPLIFICA LE SEGUENTI ESPRESSIONI:

a) $\dfrac{a^2-9}{a^2-2a-3}$

b) $\dfrac{2+x}{x+3} - \dfrac{3x-1}{x^2+x-6} - \dfrac{x}{x+3}$

c) $\dfrac{x+2}{3y} : \dfrac{x^2-2x-8}{15y^2} \cdot (x-4)$

d) $\dfrac{\dfrac{2x^3}{x+y}}{\dfrac{4xy}{x^2+2xy+y^2}} : \dfrac{x^2-y^2}{yx-x^2}$

e) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b-c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b-c}} \left(2+\dfrac{a^2-b^2-c^2}{bc}\right) + \dfrac{(a+b)^2}{2bc}$

3) $\dfrac{(2x^2+4)^2}{x(x^2-1)(x^2-4)} = 0$

a) $$\frac{a^2-9}{a^2-2a-3} = \frac{\cancel{(a-3)}\cdot(a+3)}{\cancel{(a-3)}\,(a+1)} = \frac{a+3}{a+1}$$

C.E.
$a-3\neq 0 \iff a\neq 3$
$a+1\neq 0 \iff a\neq -1$

b) $$\frac{2+x}{x+3} - \frac{3x-1}{x^2+x-6} - \frac{x}{x+3} = \frac{2+x}{x+3} - \frac{3x-1}{(x+3)(x-2)} - \frac{x}{x+3} =$$

$$= \frac{(x-2)(2+x)-3x+1-x\,(x-2)}{(x+3)\cdot(x-2)} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2}-4-3x+1\cancel{-x^2}+2x}{(x+3)\,(x-2)} = \frac{-x-3}{(x+3)(x-2)} = \frac{-\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x-2)} =$$

$$= -\frac{1}{x-2}$$

C.E. $x+3\neq 0 \Rightarrow x\neq -3$
$x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$

c) $$\frac{x+2}{3y} : \frac{x^2-2x-8}{15y^2}\cdot(x-4) =$$

$$= \frac{\cancel{x+2}}{\cancel{3y}}\cdot\frac{{}^{5}\cancel{15}\,y^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-4)}\,\cancel{(x+2)}}\cdot\cancel{(x-4)} =$$

$$= 5y$$

CE.
- $y\neq 0$
- $x-4\neq 0 \Rightarrow x\neq 4$
- $x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2$

d) $$\frac{\dfrac{2x^3}{x+y}}{\dfrac{4xy}{x^2+2xy+y^2}} : \frac{x^2-y^2}{yx-x^2} =$$

CE.

$$= \frac{2x^3}{x+y}\cdot\frac{x^2+2xy+y^2}{4xy}\cdot\frac{yx-x^2}{x^2-y^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2}x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x+y}}\cdot\frac{(\cancel{x+y})^2}{{}_2\cancel{4}\cancel{x}\,y}\cdot\frac{x\,\boxed{(y-x)}}{(\cancel{x-y})\,(\cancel{x+y})} =$$

$-(\cancel{-y}+x)$

$$= \frac{-x^3}{2y}$$

$+ \circ -$

3) $$\frac{(2x^2+4)^2}{x(x^2-1)(x^2-4)} = 0$$

CE.

$x \neq 0$

$x^2-1 \neq 0 \iff x \neq -1 \wedge x \neq 1$

$x^2-4 \neq 0 \iff x \neq -2 \wedge x \neq 2$

$\cancel{x \neq \pm 1}$

$\Updownarrow$

$$(2x^2+4)^2 = 0 \iff 2x^2+4=0$$

$$\iff 2x^2 = -4 \iff x^2 = -2$$ IMPOS.

2) l) $$\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b-c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b-c}} \left(2+\frac{a^2-b^2-c^2}{bc}\right) + \frac{(a+b)^2}{2bc} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{b-c+a}{a(b-c)}}{\frac{b-c-a}{a(b-c)}} \quad \frac{2bc+a^2-b^2-c^2}{bc} + \frac{(a+b)^2}{2bc} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{b-c+a}{a\cancel{(b-c)}} \cdot \frac{a\cancel{(b-c)}}{b-c-a} \cdot \frac{\boxed{2bc+a^2-b^2-c^2}}{bc} + \frac{(a+b)^2}{2bc} =$$

OSSERVO CHE $-b^2-c^2+2bc = -(b-c)^2$

$$\Rightarrow 2bc+a^2-b^2-c^2 = a^2-(b-c)^2 =$$

$$= (a+(b-c))(a-(b-c)) =$$

$$= (a+b-c)(a-b+c)$$

$$= -(b-\cancel{c}-a)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{b-c+a}{b-\cancel{c}-a}\;\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{bc} + \frac{(a+b)^2}{2bc} =$$

$$= \frac{-(b-c+a)^2 + (a+b)^2}{2bc} =$$

$$= \frac{-(b^2+c^2+a^2-2bc+2ab-2ac)+a^2+b^2+2ab}{2bc} =$$

$$= \frac{-\cancel{b^2}-c^2-\cancel{a^2}+2bc-\cancel{2ab}+2ac+\cancel{a^2}+\cancel{b^2}+\cancel{2ab}}{2bc} =$$

$$= \frac{\cancel{c}\,(2a+2b-c)}{2b\cancel{c}} = \frac{2a+2b-c}{2b}$$

SISTEMI LINEARI

DEF. UN SIST. LIN. NELLE VARIABILI x, y

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

GEOMETRICAMENTE RAPPRESENTANO 2 RETTE

HA COME SOLUZIONE, SE ESISTE, LE COPPIE (x, y) CHE SONO SOL. SIMULTANEAMENTE DI ENTRAMBE LE EQUAZIONI

1. RETTE SONO //, CIOÈ NON SI INTERSECANO
   ↳ IL SIST. NON HA SOL., $S = \emptyset$
2. RETTE SONO INCIDENTI, CIOÈ SI INTERSECANO IN UN PUNTO $(\bar{x}, \bar{y})$.
   ↳ 1 SOL.
3. RETTE COINCIDENTI, CIOÈ SI INTERSECANO IN INFINITI PUNTI.
   ↳ ∞ SOL., SIST. INDETERMINATO

METODI DI RISOLUZIONE:

1) SOSTITUZIONE
2) CONFRONTO
3) RIDUZIONE

$\underline{\text{ES.}}$ $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$ $\begin{matrix} \to y=1-x \\ \to y=-\frac{3}{2}x+1 \end{matrix}$ FORMA ESPLICITA

RISOL. ALGEBRICA (SOSTITUZIONE):

$$\begin{cases} y=1-x \\ 3x+2\cdot(1-x)=2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} * \\ 3x+\cancel{2}-2x=\cancel{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$$

$(0;1)$

RISOL. GRAFICA:

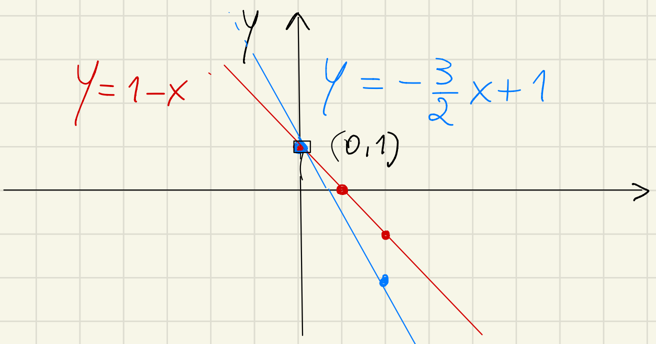
$$\begin{cases} y=1-x & (1) \\ y=-\frac{3}{2}x+1 & (2) \end{cases}$$

(1)

x	y
0	$1-0=1$
1	$1-1=0$
2	$1-2=-1$

(2)

x	y
0	$-\frac{3}{2}\cdot 0+1=1$
2	-2
4	-5



ES.

1) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-3y=7 \\ x+y=1 \end{cases}$ • ALG • GRAF.

2) $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ y \geq x+1 \end{cases}$ • GRAF.

1) $\begin{cases} y = -2x & (1) \\ y = \dfrac{x-7}{3} & (2) \\ y = 1-x & (3) \end{cases}$ IMPOS.

ALG: $-2x = 1-x \iff x=-1$

$\iff y=2 \quad (-1,2)$

(2) $2 \overset{?}{=} \dfrac{-1-7}{3} \iff 2 \neq -\dfrac{8}{3}$

2) $\begin{cases} |x| \leq 2 \iff -2 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ y \geq x+1 \end{cases}$ $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

$y = x+1$

$3 \overset{?}{\geq} -4+1$ ✓