Precorso 2023

La pagina del precorso è la seguente

https://elly2023.dia.unipr.it/course/view.php?id=974%C2%A0e

Robuschi Ottavia

4/9/23

Prima lezione - Logica e insiemistica

DEF. UNA PROPOSIZIONE LOGICA (O ENUNCIATO) È UNA FRASE A CUI È POSSIBILE ATTRIBUIRE UN VALORE DI VERITÀ (V O F)

ES. p: "VADO IN STAZIONE"

q: "ACCOMPAGNO IL MIO AMICO IN PALESTRA"

↓ PROP. SEMPLICI: POSSONO ESSERE LEGATE TRA LORO MEDIANTE CONNETTIVI LOGICI PER OTTENERE PROP. COMPOSTE

E, O, NON, SE ... ALLORA ..., SE E SOLO SE (SSE)

TABELLE DI VERITÀ: TABELLE IN CUI SI RIPORTANO LE PROP. SEMPLICI, LE PROP. COMPOSTE E I RELATIVI VALORI DI VERITÀ POSSIBILI.

NEGAZIONE (NON)

$\neg P$ o $\overline{P}$

P	$\neg P$
V	F
F	V

CONGIUNZIONE (E)

p e q

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ES:

SCRIVERE LA TAVOLA DI VERITÀ DI $p \wedge (\neg q)$

p	q	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

DISGIUNZIONE: O

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

IMPLICAZIONE (SE ... ALLORA ...)

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p: "VADO ALLA COOP"
q: "PRENDO LE MELE"
$p \Rightarrow q$: "SE VADO ALLA COOP, ALLORA PRENDO LE MELE".

L'INVERSA DI $p \Rightarrow q$ È $q \Rightarrow p$.

SE $p \Rightarrow q$ È VERA, NON È DETTO CHE ANCHE $q \Rightarrow p$ LO SIA MA PUÒ ACCADERE CHE LO SIANO ENTRAMBE.

DOPPIA IMPLICAZIONE (SE E SOLO SE)

$p \Leftrightarrow q$

EQUIVALE A $p \Rightarrow q$ E $q \Rightarrow p$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

DEF. DUE PROPOSIZIONI SI DICONO LOGICAMENTE EQUIVALENTI SE HANNO LA STESSA TAVOLA DI VERITÀ.

ES.

1) "$p \wedge q$" $\equiv$ "$\neg[(\neg p) \vee (\neg q)]$"

2) "$p \vee q$" $\equiv$ "$\neg[(\neg p) \wedge (\neg q)]$"

3) "$p \Rightarrow q$" $\equiv$ "$(\neg p) \vee q$"

1)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$\neg[(\neg p) \vee (\neg q)]$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F

COINCIDE CON $p \wedge q$

2)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p)\wedge(\neg q)$	$\neg[(\neg p)\wedge(\neg q)]$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F

COINCIDE CON $p \vee q$

3)

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

COINCIDE CON $p \Rightarrow q$

4) $[\neg(a \wedge b)] \equiv [(\neg a) \vee (\neg b)]$

5) $[\neg(a \vee b)] \equiv [(\neg a) \wedge (\neg b)]$

4)

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$[(\neg a)\vee(\neg b)]$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

6) CONTRONOMINALE

$$[a \Rightarrow b] \equiv [\neg b \Rightarrow \neg a]$$

I QUANTIFICATORI

$\exists$ ESISTENZIALE "ESISTE"

$\forall$ UNIVERSALE "PER OGNI"

DEF. UN ENUNCIATO APERTO (O PREDICATO) È UNA FRASE CHE CONTIENE UNA O PIÙ VARIABILI.

ES. "X È UN NUMERO NATURALE MAGGIORE DI 7"

$X = 8 \rightarrow$ PROP. VERA
$X = 4 \rightarrow$ PROP. FALSA

PUÒ SUCCEDERE CHE SI VOGLIA TRASFORMARE UN ENUNCIATO APERTO IN UNA PROPOSIZIONE:

- $\forall$ SI USA PER ESPRIMERE CHE UNA CERTA PROP. È VERA PER TUTTI GLI ELEMENTI DI UN INSIEME
- $\exists$ SI USA PER ESPRIMERE CHE ESISTE ALMENO UN ELEMENTO DI UN INSIEME CHE SODDISFA UNA CERTA PROP.

ES. $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$\forall x \in A, \ x \in \mathbb{N}$ VERA

$\in$ APPARTIENE

$\mathbb{N}$ NUMERI NATURALI $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\exists x \in A \mid x$ È MULTIPLO DI 3. V

$\mid$ TALE CHE

$\forall x \in A$, x È MULTIPLO DI 3. FALSO

$\downarrow$ NEGAZIONE

$\exists x \in A \mid x$ NON È MULTIPLO DI 3.

$\cancel{\forall}$ $\leftarrow$ NON SCRIVERE

ES. $\nexists x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 2$ VERA.

$\uparrow$ NON ESISTE

INSIEMI

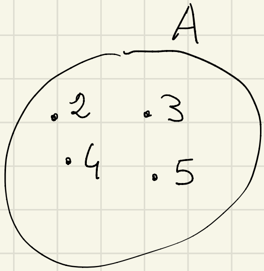
RAPPRESENTAZIONE:

- PER ELENCAZIONE $A = \{2, 3, 4, 5\}$
- PER CARATTERISTICA

COMPRESO

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 6\}$

- DIAGRAMMA DI EULERO-VENN



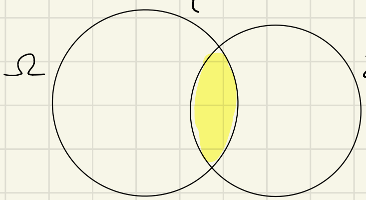
1. $\in$ (APPARTENENZA): $2 \in A$, $1 \notin A$
2. $\emptyset$ (INSIEME VUOTO): INSIEME PRIVO DI ELEMENTI
3. $\subseteq$ (INCLUSIONE): $\Omega \subseteq \Sigma$

$$\iff \forall x \in \Omega,\ x \in \Sigma$$

4. $\cap$ (INTERSEZIONE):

E

$$\Omega \cap \Sigma := \{x \mid x \in \Omega \wedge x \in \Sigma\}$$

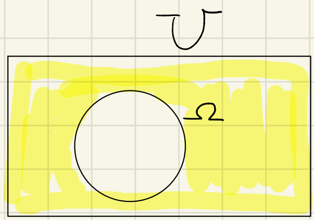


5) $\cup$ (UNIONE):

$$\Omega \cup \Sigma \overset{Def}{:=} \{x \mid x \in \Omega \ \overset{\text{o}}{\vee} \ x \in \Sigma\}$$

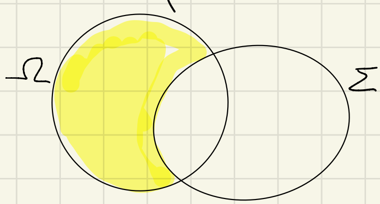
6) Ω^c (COMPLEMENTARE)

$$\Omega^c := \{x \mid x \notin \Omega\}$$

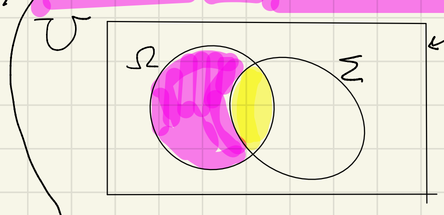


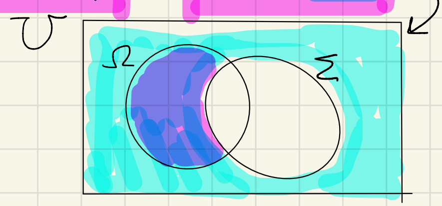
7) $\setminus$ (DIFFERENZA)

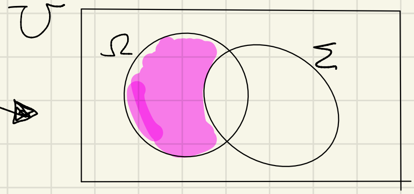
$$\Omega \setminus \Sigma := \{x \mid x \in \Omega \wedge x \notin \Sigma\}$$



Oss. 1) $\boxed{\Omega \setminus \Sigma} = \boxed{\Omega \setminus (\Sigma \cap \Omega)} = \boxed{\Omega \cap \Sigma^c}$







2) $(\Omega^c)^c = \Omega$

3) $\emptyset^c = U$ INSIEME UNIVERSO (O AMBIENTE).

TH (LEGGI DI DE MORGAN)

DATI GLI INSIEMI Ω e Σ

(i) $(\Omega \cap \Sigma)^c = \Omega^c \cup \Sigma^c$

(ii) $(\Omega \cup \Sigma)^c = \Omega^c \cap \Sigma^c$

DIM. (i) $(\Omega \cap \Sigma)^c = \{x \mid x \in \Omega \text{ e } x \in \Sigma\}^c =$

$= \{x \mid x \notin \Omega \text{ o } x \notin \Sigma\} =$

$= \Omega^c \cup \Sigma^c.$

→ SI PUÒ SFRUTTARE L'EQUIVALENZA LOGICA VISTA SOPRA ES. 4).

(ii) $(\Omega \cup \Sigma)^c = \{x \mid x \in \Omega \text{ o } x \in \Sigma\}^c =$

$= \{x \mid x \notin \Omega \text{ e } x \notin \Sigma\} =$

$= \Omega^c \cap \Sigma^c.$

DEF. $\mathcal{P}(\Omega)$ INSIEME DELLE PARTI DI Ω:

È L'INSIEME DI TUTTI I SOTTOINSIEMI DI Ω

CIOÈ $\mathcal{P}(\Omega) = \{ E \mid E \subseteq \Omega \}$

ES. $\Omega = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{ \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a,b\}; \{b,c\}; \{a;c\}; \Omega; \emptyset \}$$

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^3 = 8$$

$|\Omega|$: CARDINALITÀ DI Ω = N° DEI SUOI ELEMENTI

$|\Omega| = 3$

DEF. PRODOTTO CARTESIANO

$$\Omega \times \Sigma := \{ (x,y) \mid x \in \Omega ; y \in \Sigma \}$$

ES. $\Omega = \{a, b\}$ $\Sigma = \{1, 2\}$

$$\Omega \times \Sigma = \{ (a,1); (a,2); (b,1); (b,2) \}$$

$\Omega \times \Sigma \neq \Sigma \times \Omega$ CIOÈ IL P. CART. NON È COMMUTATIVO

ESERCIZI

1) DET. GLI INSIEMI (GRAFICAMENTE)

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1 \text{ o } x^2 \geq 5\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 100 \text{ e } (2x - 1 \leq 0 \text{ o } x \geq 7)\}.$$

2) DIRE QUALI DELLE SEGUENTI UGUAGLIANZE SONO VERE:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid (x > 2 \text{ e } x < 6) \text{ o } x < 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ e } (x < 6 \text{ o } x < 0)\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid (x < 1 \text{ o } x > 3) \text{ e } x \leq 2\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ o } (x < 1 \text{ e } x \geq -3)\}.$

3) PROVARE LE SEGUENTI:

a) $E \setminus F = E \cap F^c$

b) $E \setminus F = \emptyset \iff E \subset F$

4) DET. $\mathcal{P}(\{a, 1, \bullet\})$

5) DET. GLI EL. DI $\{1, x\} \times \{a, 1, \bullet\}$.