$k \in \mathbb{R}$ $\quad y = x^2 - 4x + k \quad$ $2x + y = 0$

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + k \\ y = -2x \end{cases}$$

$$-2x = x^2 - 4x + k$$

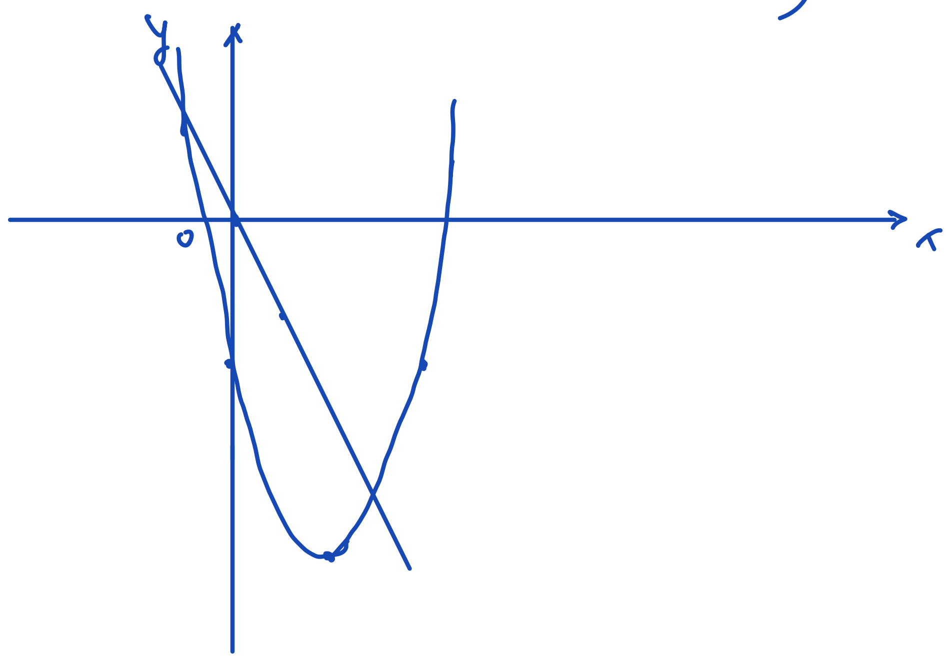
$$x^2 - 2x + k = 0$$

$$\Delta = 4 - 4k \qquad \Delta > 0$$

$$4 - 4k > 0 \Rightarrow k < 1$$

$k = -3$ $\quad y = x^2 - 4x - 3 \quad$ $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16+12}{4}$

$$V(2;\ 4 - 8 - 3 = -7)$$



__Le funzioni__

$A \times B = \{(x, y) \,/\, x \in A,\ y \in B\}$ prodotto cartesiano

$\mathcal{R} \subseteq A \times B$

Esempio

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y = 2x \qquad x \in A$ e $y \in B$

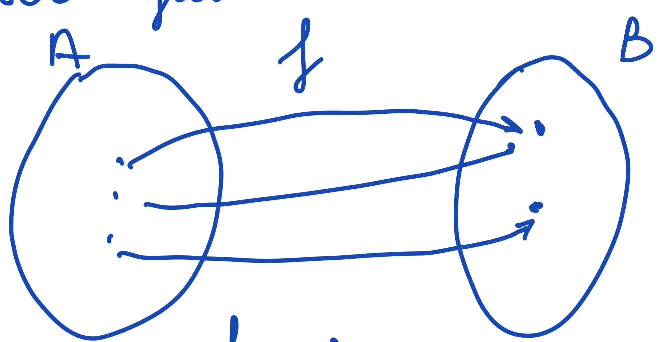
$f: A \rightarrow B$ funzione

$\forall x \in A,\ \exists!\, y \in B : y = f(x)$

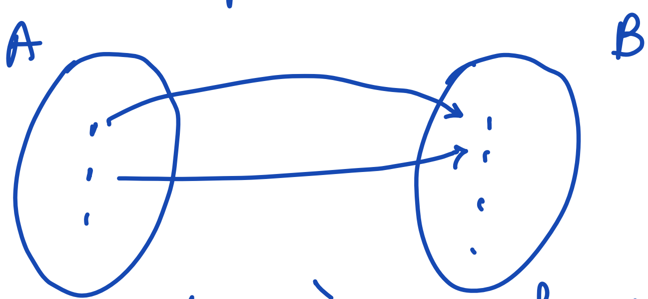
$\exists$ esiste almeno un

$\exists!$ esiste uno ed un solo

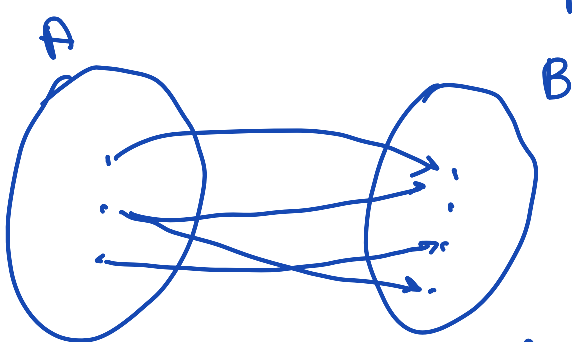
$\forall$ per ogni.



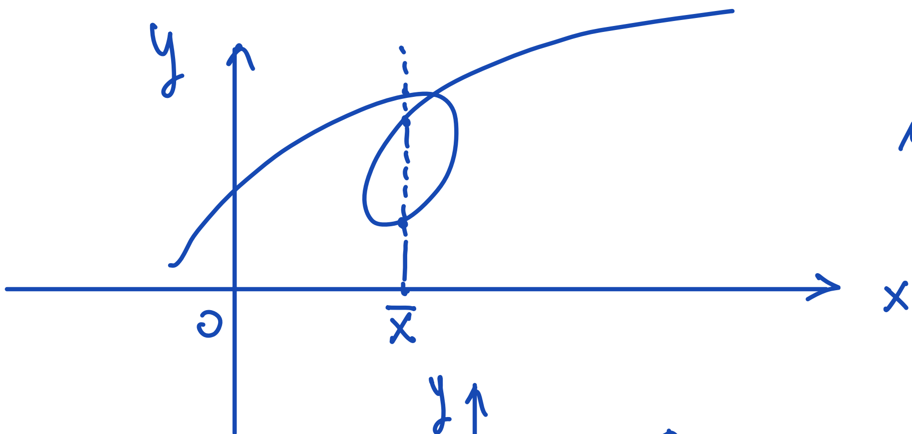
funzione



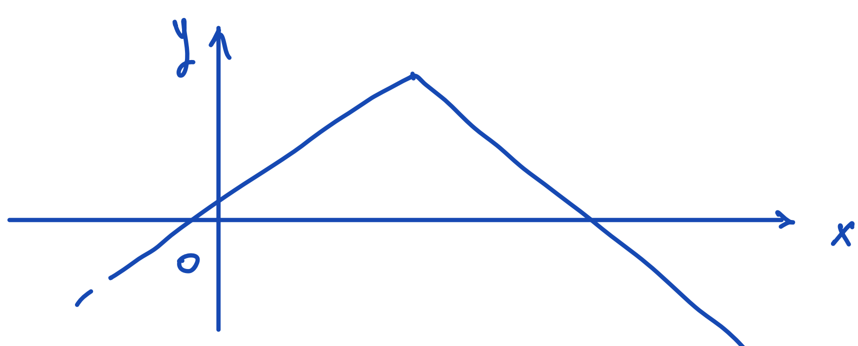
non è una funzione

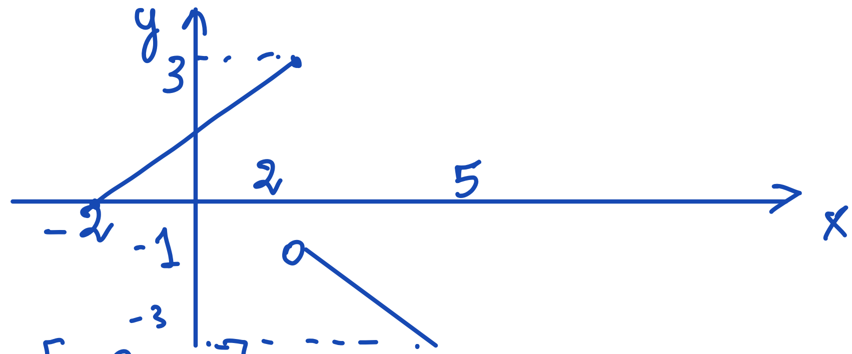


non è una funzione



non si tratta di una funzione





$D = [-2, 5]$

$f(D) = [-3, -1) \cup [0, 3]$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R} \}$ $\qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Esempio:

$y = x^2$ $\qquad D = \mathbb{R}$

$f(D) = \mathbb{R}^+_0 = [0; +\infty)$

Esempio:

$$y = \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}$$

funzione razionale fratta

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \wedge x \neq -2 \}$

$= \mathbb{R} - \{-2, 1\}$

Esempio:

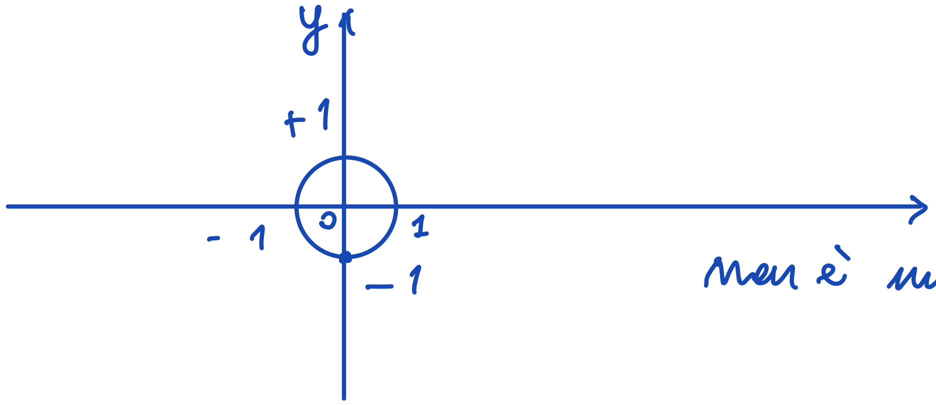
$y = \sqrt{x^2 - 25}$ $\qquad$ funzione irrazionale

$y = x^2 + x\sqrt{2}$

$D_f : \quad x^2 - 25 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq -5 \vee x \geq 5$

$D_f = (-\infty, -5] \cup [5; +\infty)$

$\{ (x, y) : x^2 + y^2 = 1 \}$



non è una funzione

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$y = \sqrt{1-x^2} \qquad y \geq 0 \qquad D_f : [-1, 1]$$

$$y = -\sqrt{1-x^2} \qquad y \leq 0 \qquad D_f : [-1, 1]$$

funzione iniettiva

$f : A \to B$ iniettiva se $\forall a_1, a_2 \in A$

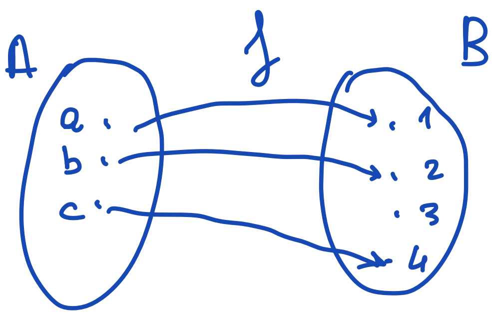
$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \qquad \forall a_1, a_2 \in A$$

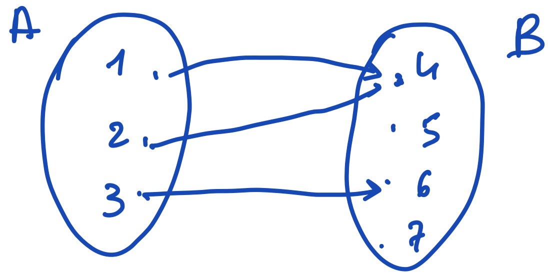
$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$$

$$\text{non } \mathcal{B} \Rightarrow \text{non } \mathcal{A}$$

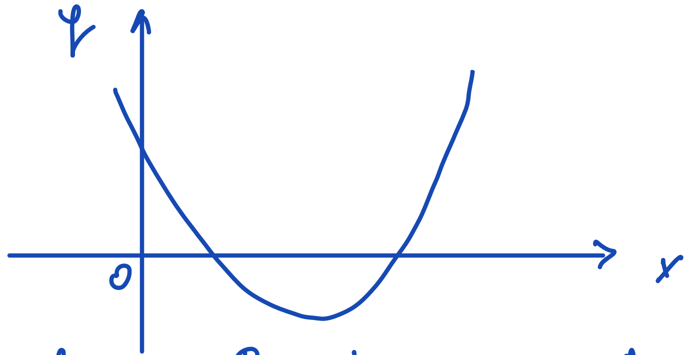
Esempio:



funzione iniettiva



funzione non iniettiva



funzione non iniettiva

Esempio: $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ $\quad D_f: \mathbb{R}-\{1\}$

$$f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$$

$$\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2y+1}{y-1} \Rightarrow \cancel{2xy}-2x+y-\cancel{1}=\cancel{2xy}+x-2y-\cancel{1}$$

$$-3x=-3y \Rightarrow x=y$$ funzione iniettiva

Controesempio: $f(x)=x^2$ $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ non e' iniettiva

non $\left(\forall x,y\in\mathbb{R} \quad x\neq y \Rightarrow f(x)\neq f(y)\right)$

non $\left(\forall x,y\in\mathbb{R} \quad x=y \right.$ o $\left. f(x)\neq f(y)\right)$

$(A\Rightarrow B)\equiv($non A o $B)$

$\boxed{\exists x,y\in\mathbb{R} : x\neq y \text{ e } f(x)=f(y)}$

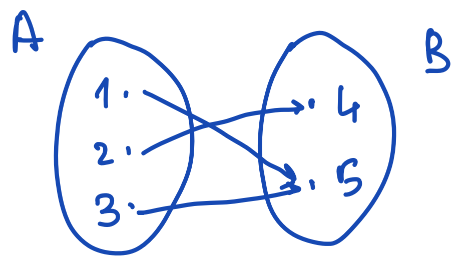
$(A\Rightarrow B)\equiv($non $B\Rightarrow$ non $A)$

$\bar{x} = 1$ e $\bar{y} = -1$: $1 \neq -1$ e $(1)^2 = (-1)^2$

$f: A \to B$ suriettiva
surgettiva
surjettiva

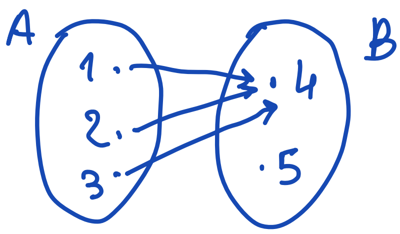
$\forall y \in B, \ \exists x \in A : f(x) = y$

Esempio:



funzione suriettiva

Controesempio:



funzione non suriettiva

Esempio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2x+1$ è suriettiva

$\forall y \in \mathbb{R}, \ \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$

$y = 2x+1 \qquad 2x = y-1$

$x = \frac{y-1}{2} \qquad \forall y \in \mathbb{R}$

Controesempio: $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ $\quad f$ non suriettiva

non $(\forall y \in \mathbb{R}, \ \exists x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = y)$

$\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \ f(x) \neq y$

$y = 2 \qquad f(x) \neq 2 \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \qquad y(x-1) = 2x+1$$

$$yx - y = 2x + 1 \qquad yx - 2x = y + 1$$

$$x(y-2) = y+1 \qquad y \neq 2$$

$$x = \frac{y+1}{y-2} \qquad f \text{ non è suriettiva}$$

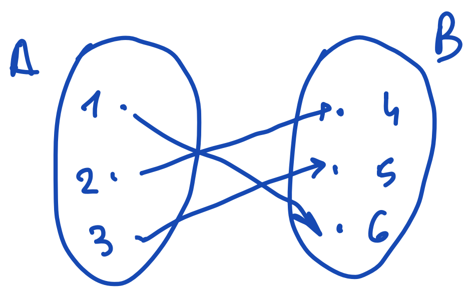
$f : A \to B$ funzione biunivoca o biiettiva o bigettiva

funzione biunivoca sse f è iniettiva e suriettiva

$$\left[\forall x, y \in A \,,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\right]$$
e
$$\left[\forall y \in B \,,\ \exists\, x \in A :\ f(x) = y\right]$$

$$\forall y \in B \,,\ \exists!\, x \in A :\ f(x) = y$$

Esempio:



funzione biunivoca

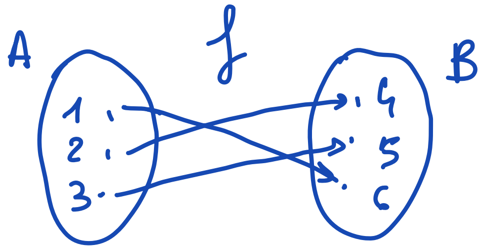
Osservazione: la funzione $f : A \to B$ non è biunivoca
sse non $[(f \text{ è iniettiva}) \text{ e } (f \text{ è suriettiva})]$
sse $(f \text{ non è iniettiva}) \text{ o } (f \text{ non è suriettiva})$

$f: A \to B$ funzione biunivoca

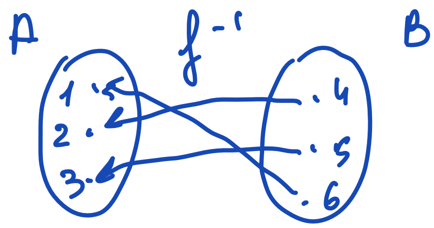
esiste $f^{-1}: B \to A$ funzione inversa

$\forall\ b \in B \quad f^{-1}(b) = a$ sse $f(a) = b$

Esempio:



funzione biunivoca



funzione inversa

Esempio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ determinare se esiste la funzione inversa di $f(x) = 3x - 1$

$y = 3x - 1$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad 3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$

$3x_1 = 3x_2$

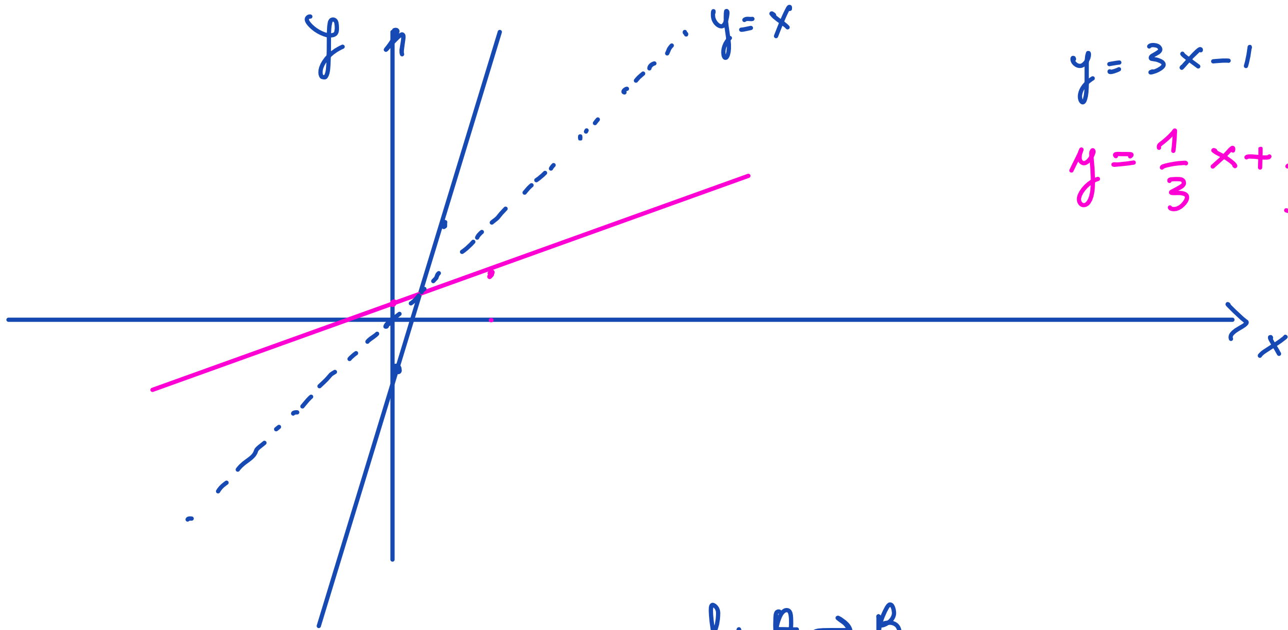
$x_1 = x_2$ funzione iniettiva

$y = 3x - 1 \qquad 3x = y + 1 \qquad x = \frac{y+1}{3} \quad \forall y \in \mathbb{R}$

funzione suriettiva

$\exists\ f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{3} y + \frac{1}{3}$$



$y = 3x - 1$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

$f: A \to B$

$G_f = \{ (a, f(a)) \in A \times B \,/\, a \in A \}$

$G_{f^{-1}} = \{ (b, f^{-1}(b)) \in B \times A \,/\, b \in B \}$

$f^{-1}: B \to A$

---

funzione identità

$f: A \to A$ identità in A se $f(a) = a \ \forall a \in A$

funzione biunivoca

$\{ (a, a) : a \in A \}$ grafico della funzione identità

Il grafico è la bisettrice del 1° e 3° quadrante

$f: A \to B$ biunivoca $A, B \in \mathbb{R}$

il grafico f^{-1} è simmetrico rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante

---

$f(A)$ immagine di $f: A \to B$

$f(A) = \{ b \in B : \exists a \in A : f(a) = b \}$

OSS: f è suriettiva sse $f(A) = B$

$f^{-1}(E)$ controimmagine di E

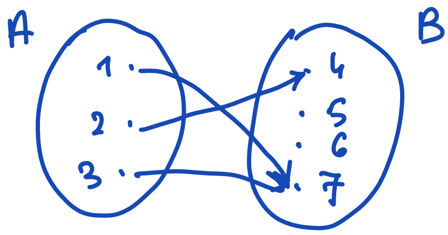
$f: A \to B \qquad E \subseteq B$

$f^{-1}(E) = \{a \in A : f(a) \in E\}$

OSS: $f^{-1}(E)$ è ben definita anche non esiste la funzione inversa

---

Esempio



$f^{-1}(\{7\}) = \{1, 3\}$

$f^{-1}(\{4, 7\}) = A$

<u>Restrizione</u>

$f: A \to B \qquad E \subseteq A$

restrizione di f ad E

$f_{|E} : E \to B$ tale che

$f_{|E}(x) = f(x) \quad \forall x \in E$

Esempio: $f(x) = x^2 \qquad f: \mathbb{R} \to B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

funzione suriettiva

Esempio: $f(x) = x^2 \qquad f_{|B} : B \to B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

funzione iniettiva e suriettiva