SISTEMI LINEARI

QUANDO SI RISOLVE UN SISTEMA LINEARE SI CERCA UNA SOLUZIONE COMUNE A DIVERSE EQUAZIONI.

CERCHIAMO $\bar{x}$ SOLUZIONE DI $\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x) = 0 \end{cases}$ QUESTO

EQUIVALE A CERCARE $\bar{x} \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m$

DOVE $A_1 = \{x : f_1(x) = 0\}$ .... $A_m = \{x : f_m(x) = 0\}$.

UN SISTEMA LINEARE IN x, y SI PRESENTA COSÌ

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

HA COME SOLUZIONI COPPIE (x, y) CHE SONO SOLUZIONI SIMULTANEAMENTE DI ENTRAMBE LE EQUAZIONI.

(x, y) SODDISFA IL SISTEMA $\Leftrightarrow (x, y) \in A \cap B$ DOVE

$$A = \{(x;y) : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0\}$$
$$B = \{(x;y) : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0\}$$

A e B SONO GRAFICI DI RETTE.

DUE RETTE POSSONO ESSERE:

- PARALLELE $\longrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$ $\nexists$ SOLUZIONE
- INCIDENTI $\longrightarrow$ $A \cap B = \{(\bar{x}; \bar{y})\}$ 1 SOLUZIONE
- COINCIDENTI $\longrightarrow$ $A \cap B = A$ ∞ SOLUZIONI

CONSIDERIAMO UN SISTEMA DI <u>TRE</u> EQUAZIONI IN DUE INCOGNITE.

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 = 0 \end{cases}$$

CERCARE LA SOLUZIONE DI QUESTO SISTEMA EQUIVALE A DETERMINARE $(x; y) \in A \cap B \cap C$

$$A = \{(x;y) : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0\}$$
$$B = \{(x;y) : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0\}$$
$$C = \{(x;y) : a_3 x + b_3 y + c_3 = 0\}$$

CASI POSSIBILI:

- LE TRE RETTE SONO TRA LORO PARALLELE $\rightarrow$ $\emptyset$ SOLUZIONI

- DUE RETTE COINCIDONO E SONO // ALLA TERZA → ∅ SOL.

- DUE RETTE COINCIDONO E INTERSECANO LA TERZA → 1 SOLUZIONE

- LE TRE RETTE COINCIDONO → ∞ SOLUZIONI

PER DETERMINARE LE SOLUZIONI IN UN SISTEMA SI PUÒ PROCEDERE PER:

- SOSTITUZIONE
- RIDUZIONE

ES. 2.14:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$

<u>SOSTITUZIONE:</u>

$\begin{cases} y=1-x \\ 3x+2(1-x)=2 \end{cases}$ $\begin{cases} * \\ 3x+\cancel{2}-2x=\cancel{2} \end{cases}$ $\begin{cases} y=1-0 \\ x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$

<u>RIDUZIONE:</u>

$\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$ $\ominus\begin{cases} 3x+3y=3 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$
$\quad\quad \diagup \quad y = 1$

$\begin{cases} 3x+3(1)=3 \\ y=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + \cancel{3} = \cancel{3} \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3y = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x \\ y = \dfrac{x-7}{3} \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

TRE RETTE DISTINTE

$\downarrow$

$\emptyset$ SOLUZIONE

c) $$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \end{cases}$$ $a \in \mathbb{R}$

CASO $a = 0$ $$\begin{cases} y = 1 \\ 2x = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$ 1 SOLUZIONE

CASO $a \neq 0$ $$\begin{cases} y = -ax + 1 \\ y = -\dfrac{2}{a}x + \dfrac{2}{a} \end{cases} \quad (*)$$

HO UNA E UN'UNICA SOLUZIONE SE $-a \neq -\dfrac{2}{a}$

$\downarrow$

$a^2 \neq 2$

$\downarrow$

$a \neq \pm\sqrt{2}$

SE $a \neq \pm\sqrt{2}$ HO 1! SOL.

$$(*) \begin{cases} -\frac{2}{a}x + \frac{2}{a} = -ax + 1 \\ y = -\frac{2}{a}x + \frac{2}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + 2 = -a^2x + a \\ * \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2x - 2x = a - 2 \\ * \end{cases} \qquad \begin{cases} x(a^2-2) = a-2 \\ * \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{a-2}{a^2-2} \\ y = -\frac{2}{a}\left(\frac{a-2}{a^2-2}\right) + \frac{2}{a} \end{cases}$$

SE $a = \sqrt{2}$ IL SISTEMA DIVENTA:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 1 \\ 2x + \sqrt{2}y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{2}x + 1 \\ y = \frac{-2}{\sqrt{2}}x + \frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

SISTEMA IMPOSSIBILE PERCHÉ // E $\neq$.

$$\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

STESSO DISCORSO PER $a = -\sqrt{2}$.

GEOMETRIA ANALITICA

LO SPAZIO $\mathbb{R}^2$ $\equiv$ $\mathbb{R}^2 = \{(x;y) : x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$

DISTANZA TRA DUE PUNTI: $P(x;y)$ $Q(z;w)$ $\in \mathbb{R}^2$

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0;+\infty[$$

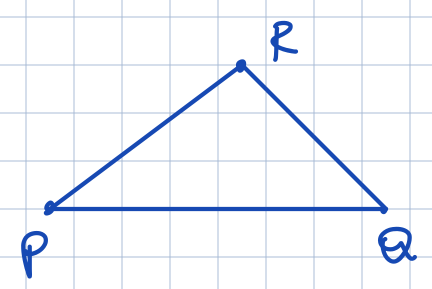
$$d(P;Q) = \sqrt{(x-z)^2 + (y-w)^2}$$

1) $d(P;Q) \geq 0 \quad \forall P,Q \qquad d(P;Q) \Longleftrightarrow P \equiv Q$

2) $d(P;Q) = d(Q;P) \quad \forall P,Q$

3) $d(P;Q) \leq d(P;R) + d(R;Q)$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE



ESERCIZIO: $P(0;0)$ $Q(3;0)$ $R(3;4)$

1) CALCOLARE $d(P;Q)$ $d(P;R)$ $d(Q;R)$

2) VERIFICARE LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$d(P;Q) = \sqrt{(0-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$d(P;R) = \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$d(Q;R) = \sqrt{(3-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{16} = 4$

$3 \overset{?}{\leq} 4+5$ sì

$4 \leq 3+5$ sì

$5 \leq 3+4$ sì

RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI:

METODO PARAMETRICO:

$P(x_1;y_1)$ $Q(x_2;y_2)$

$\overrightarrow{PQ}(x_2-x_1; y_2-y_1)$

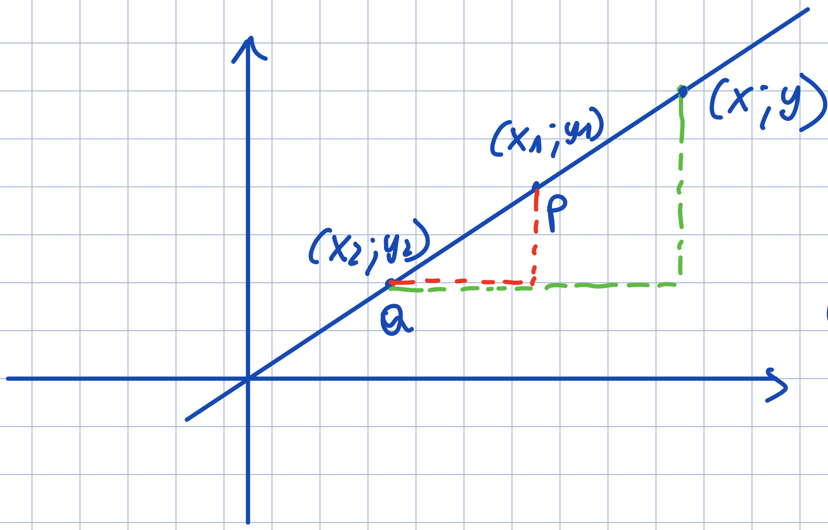
↳ DIREZIONE RETTA

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2-x_1) \\ y = y_1 + t(y_2-y_1) \end{cases}$$

es. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3+5t \end{cases}$

PASSAGGIO DALLA FORMA PARAMETRICA A QUELLA CARTESIANA:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} \\ t = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}}$$



QUESTI DUE TRIANGOLI SONO SIMILI:

$$(x-x_2):(x_1-x_2)=(y-y_2):(y_1-y_2)$$

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}$$

ES.

CALCOLARE LA RETTA PASSANTE PER $P=(-2;-1)$ $Q=(1;-3)$ SIA IN FORMA PARAMETRICA CHE CARTESIANA.

$$\overrightarrow{PQ}=(1+2;-3+1)=(3;-2)$$

$$r:\begin{cases} x=-2+3t \\ y=-1-2t \end{cases}$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x+2}{1+2}=\frac{y+1}{-3+1}$$

$$\cancel{3}\cdot\frac{x+2}{\cancel{3}}=\frac{y+1}{-2}\cdot 3$$

$$-2(x+2)=\frac{3y+3}{\cancel{-2}}\cdot\cancel{-2}$$

$$-2x-4=3y+3$$

$$2x+3y+7=0$$

COEFFICIENTE ANGOLARE:

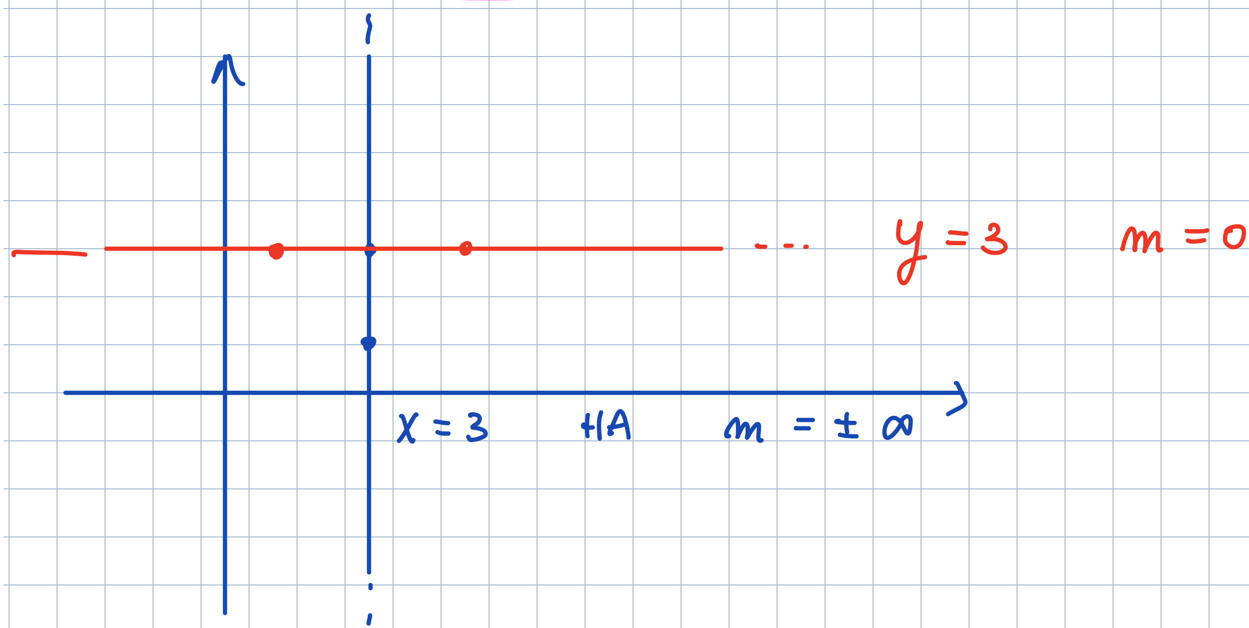
IL COEFFICIENTE ANGOLARE È L' "INDICATORE" DELLA PENDENZA DELLA RETTA.

ES: $y = -3x + 2$ $\qquad m = -3 \longrightarrow$ RETTA DECRESCENTE

$q = 2$

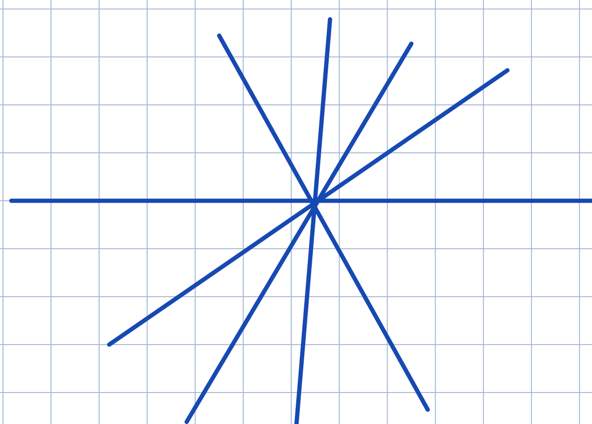
N.B. DATI $(x_1; y_1)$ E $(x_2; y_2)$ CON $x_1 \neq x_2$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



FASCIO DI RETTE PROPRIO:

$$\boxed{\begin{gathered} y - y_P = m(x - x_P) \\ x \overset{0}{=} x_P \end{gathered}}$$



ES. CALCOLARE LA RETTA PASSANTE PER $P(1;2)$
$Q(2;3)$

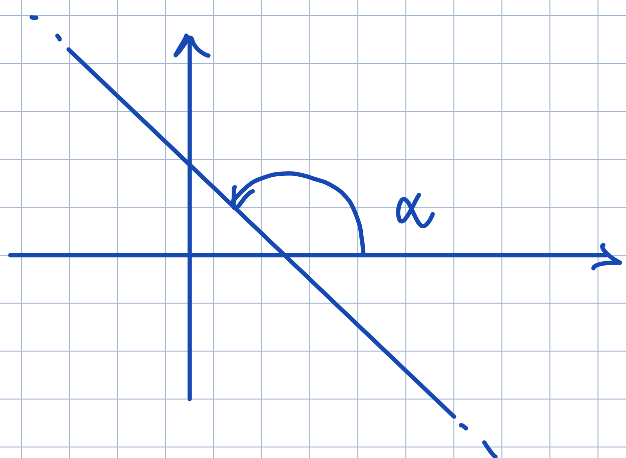
$$y-2 = m(x-1)$$

PER TROVARE LA RETTA DEL FASCIO CHE PASSA ANCHE PER Q VADO A SOSTITUIRE LE SUE COORDINATE:

$$3-2 = m(2-1)$$
$$1 = m \cdot 1$$
$$m = 1$$

$$y-2 = x-1 \longrightarrow y = x+1$$

OSS: IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA CORRISPONDE ALLA TANGENTE DELL'ANGOLO α MISURATO IN SENSO ANTIORARIO RISPETTO AL SEMIASSE POSITIVO DELLE X.



$$m = \tan(\alpha)$$

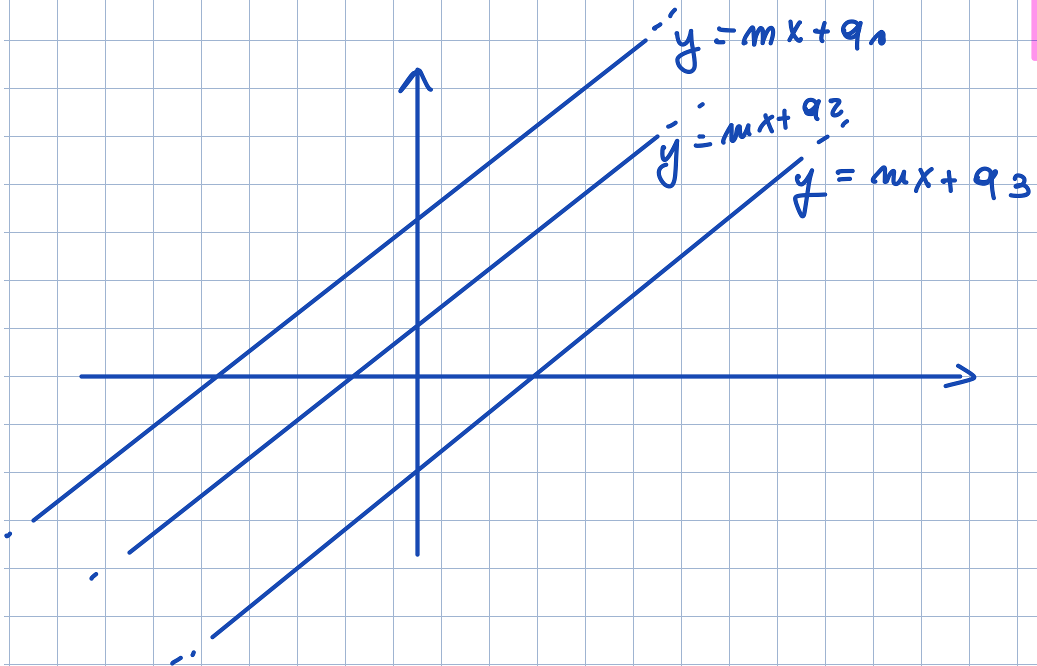
RETTE PARALLELE: $r: y = mx+q$ $r': y = m'x+q'$

$r \parallel r' \iff m = m' \wedge q \neq q'$.

ES. $y = x$ $\qquad$ $y = x + 1$

RETTE PARALLELE MA NON COINCIDENTI

FASCIO IMPROPRIO DI RETTE: $\boxed{y = mx + q}$



ES. SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER $P(1;10)$ E $//$ $y = 2x + 5$.

$$y = 2x + q$$

IMPONGO PASSAGGIO PER P $\longrightarrow$ $10 = 2 \cdot 1 + q$

$$q = 8$$

$$y = 2x + 8$$

OSS: $r: y = mx + q \qquad r': y = m'x + q'$

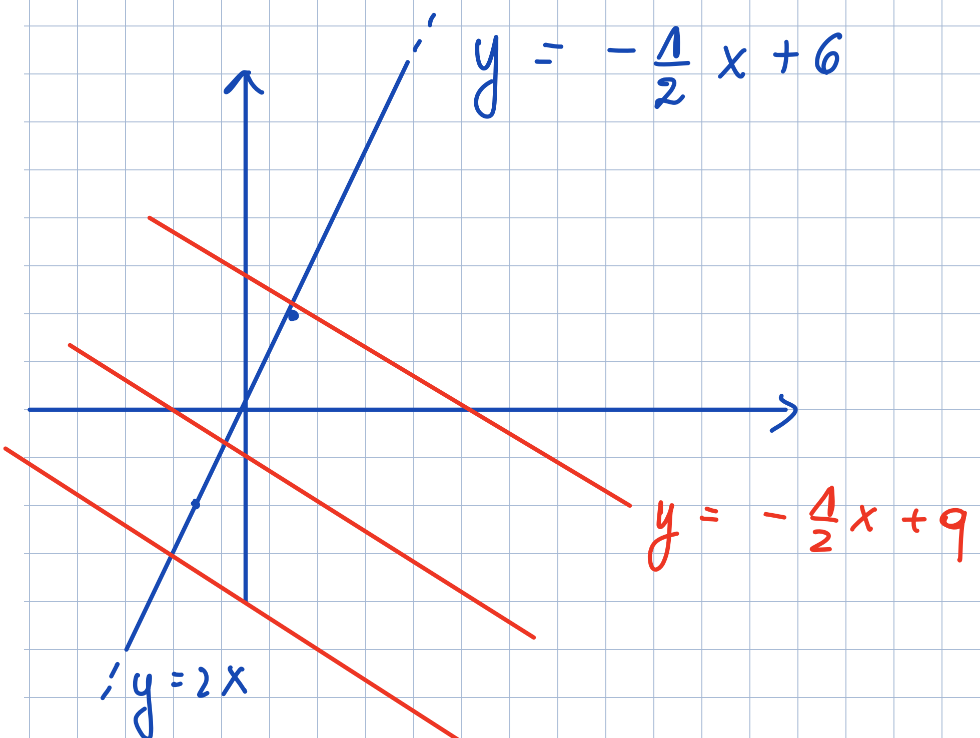
$$r \perp r' \iff m \cdot m' = -1 \iff m = -\frac{1}{m'}$$

ES. DATA LA RETTA $r: y = 2x$ DETERMINARE LA RETTA s PASSANTE PER $P(2;5)$ $\perp$ r.

1° MODO: $y = -\frac{1}{2}x + q$

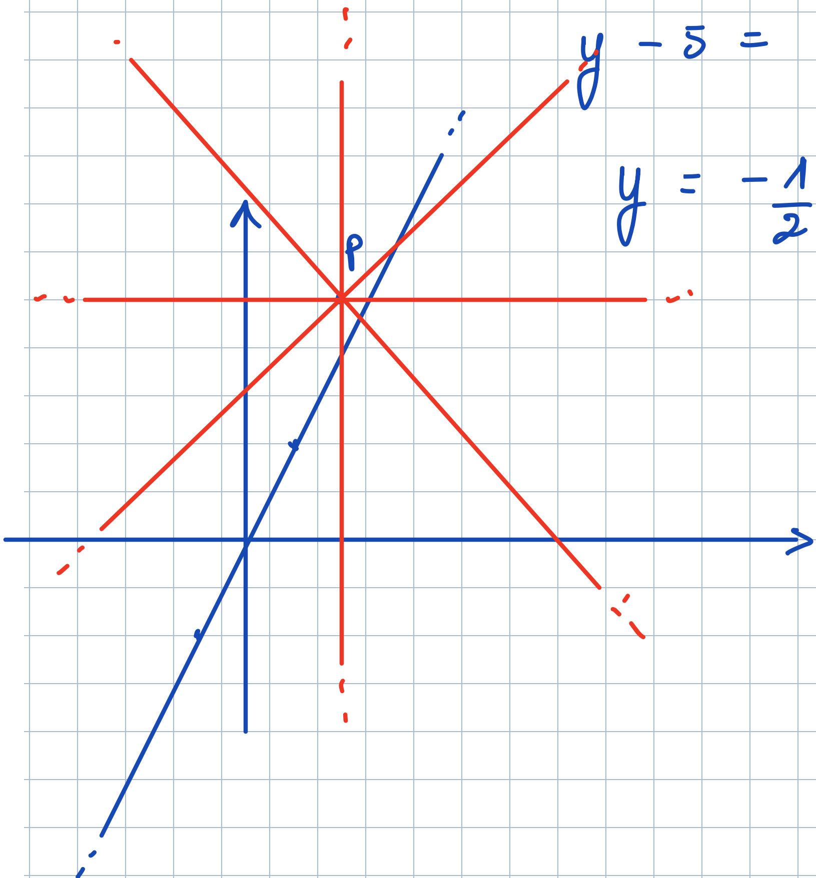
IMPONGO IL PASSAGGIO PER P

$$5 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + q$$
$$5 = -1 + q$$
$$q = 6$$



2° MODO: $y - 5 = m(x-2)$

IMPONGO CHE $m = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{m'}$



$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x-2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 6$$

OSS: L'EQUAZIONE DI UNA RETTA PUÒ ESSERE SCRITTA ANCHE NELLA FORMA: $r: ax+by+c=0$

UNA RETTA $s \parallel r$ $\quad s: ax+by+c'=0$

CON $c' \neq c$

UNA RETTA $t \perp r$ $\quad t: -bx+ay+c''=0$

$bx - ay - c'' = 0$

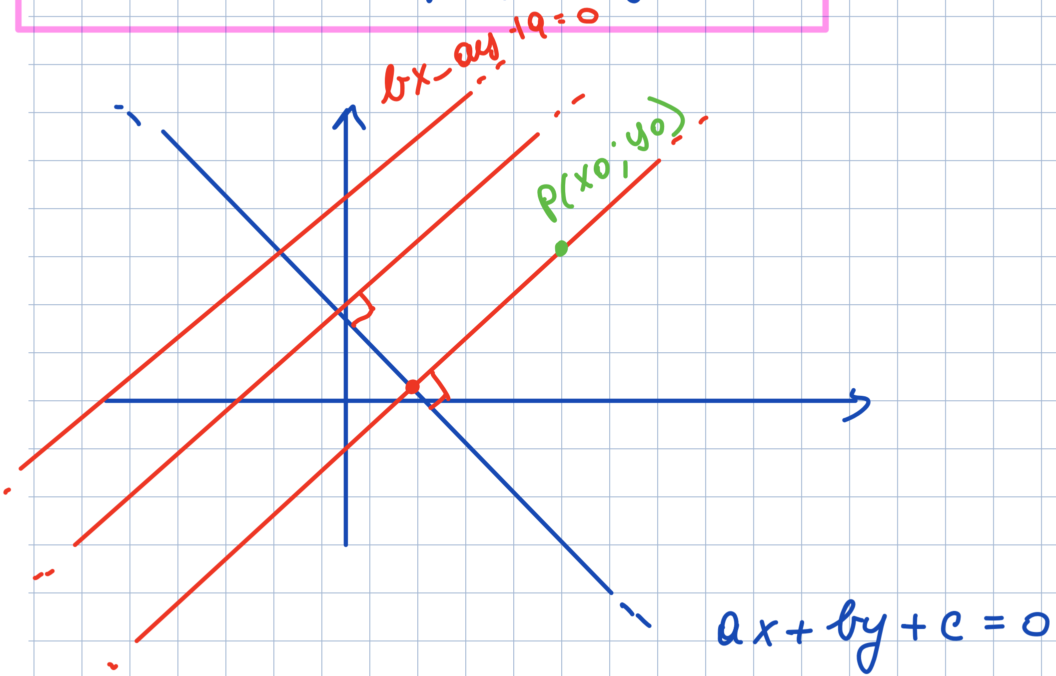
NON CI SONO VINCOLI SU c''.

DISTANZA PUNTO RETTA:

$r: \ ax + by + c = 0$

$P \notin r \qquad P(x_0; y_0)$

$$\boxed{d(P;r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$



ES: $\quad r: \ y = 3x - 5 \qquad P(1;2) \qquad$ CALCOLARE $d(P;r)$

$3x - y - 5 = 0 \qquad a = 3 \quad b = -1 \quad c = -5$

$$d(P;r) = \frac{|3\cdot 1 - 1\cdot 2 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 - 2 - 5|}{\sqrt{9+1}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{10}}{\underset{5}{\cancel{10}}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{10}}{5}$$