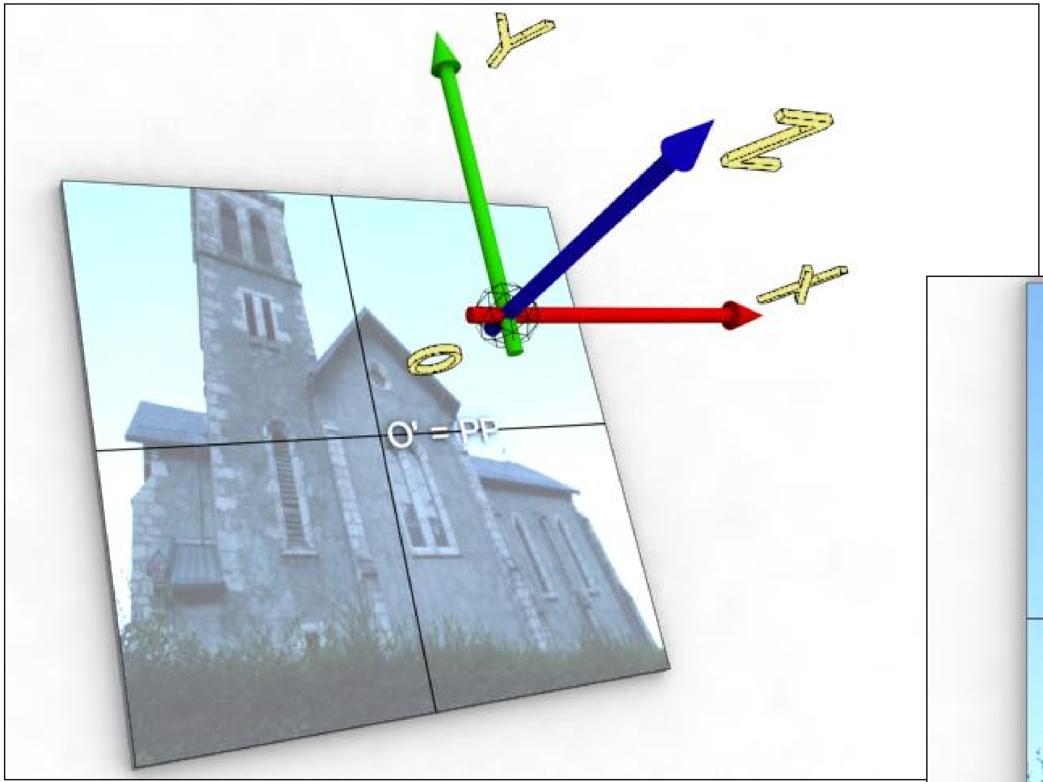
CORSO DI FOTOGRAMMETRIA E TELERILEVAMENTO

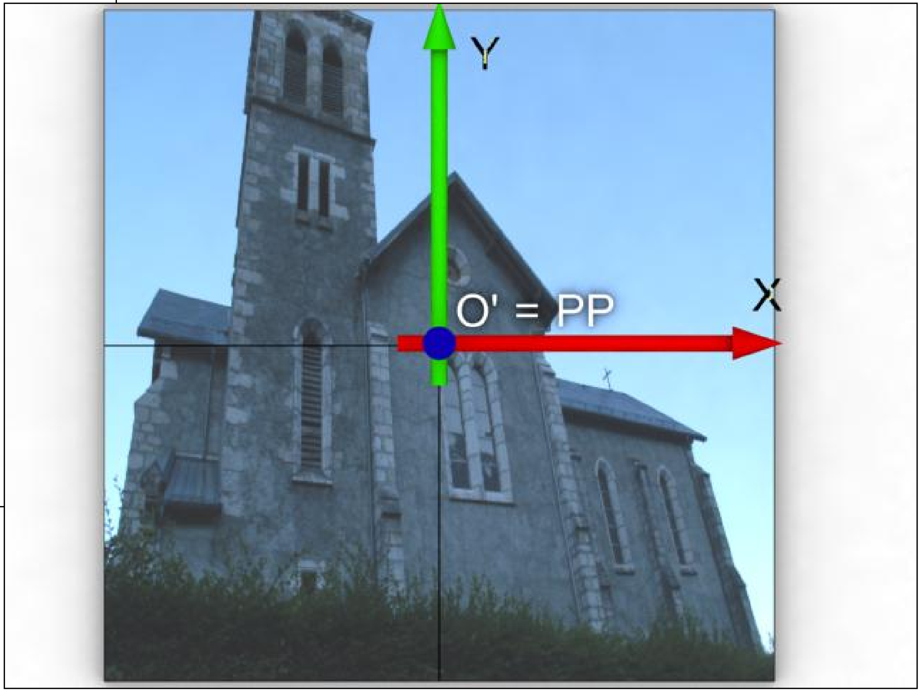
Prof. Riccardo Roncella

EQUAZIONI DI COLLINEARITA'

Consideriamo due diversi sistemi di riferimento:

1. SPAZIO IMMAGINE:

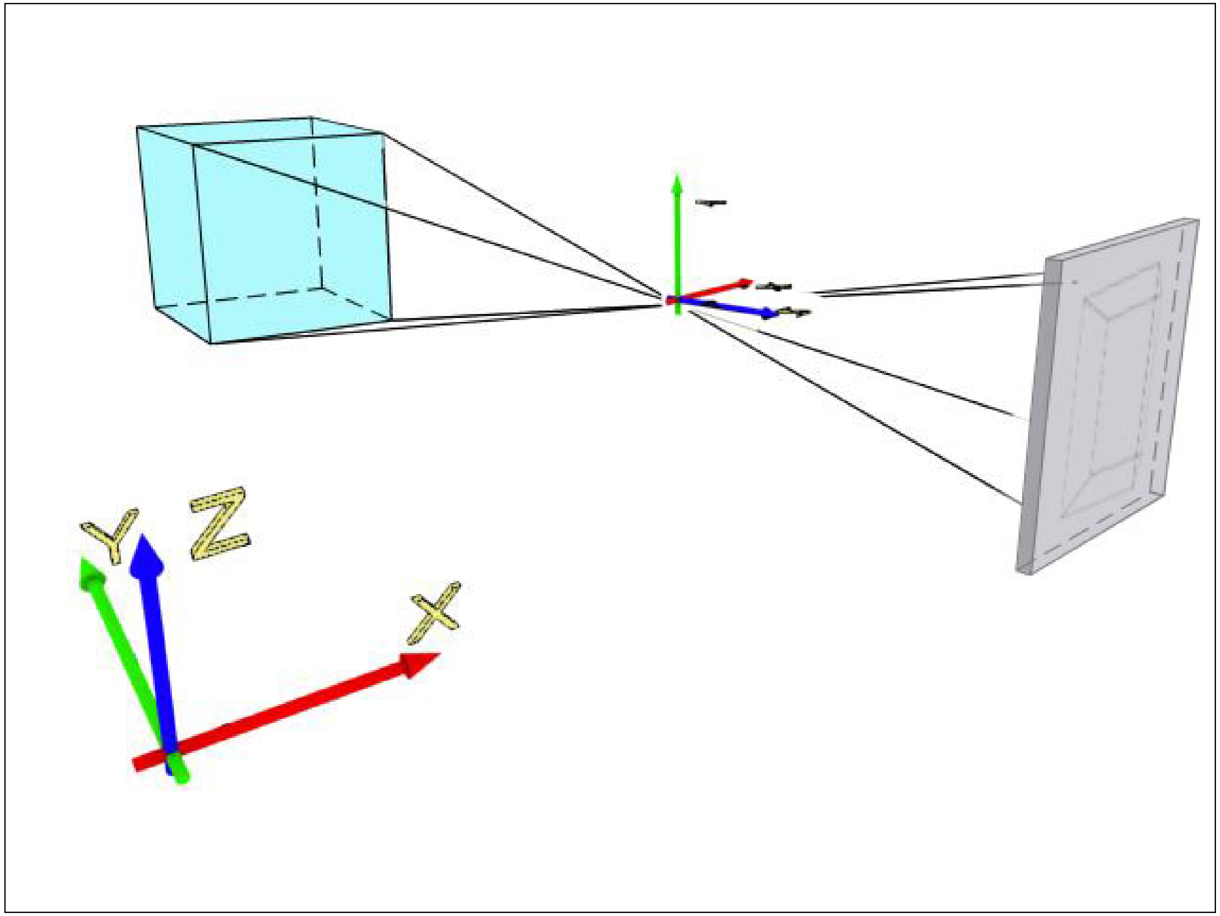




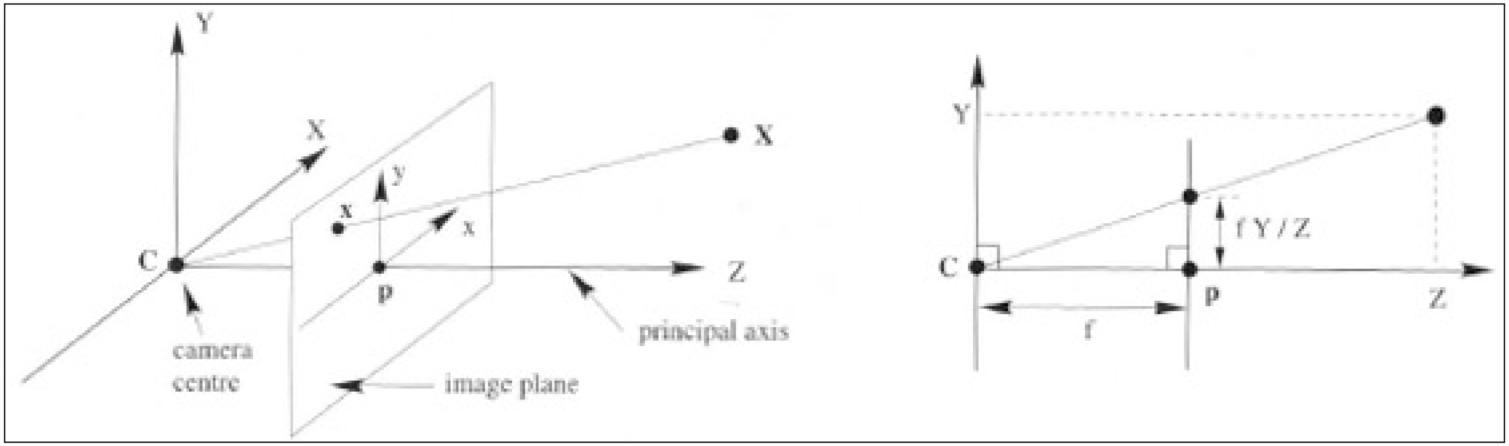
EQUAZIONI DI COLLINEARITA'

Consideriamo due diversi sistemi di riferimento:

2. SPAZIO OGGETTO (TERRENO):



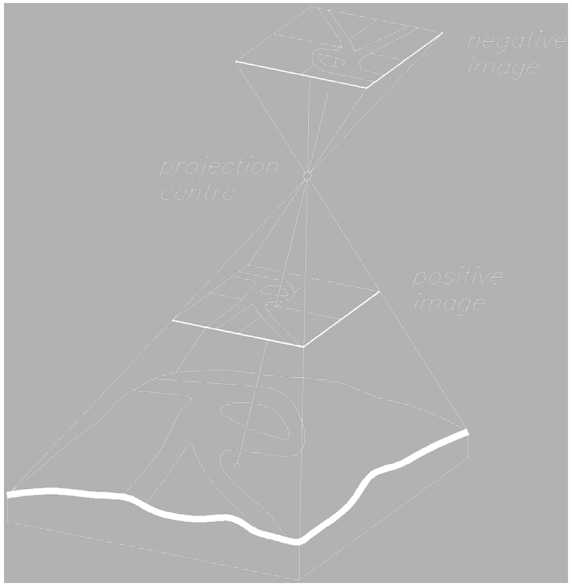
EQUAZIONI DI COLLINEARITA’



$$(CX) = \lambda \cdot (Cx)$$

A meno di una rototraslazione del sistema terreno sul sistema camera, ottengo quindi:

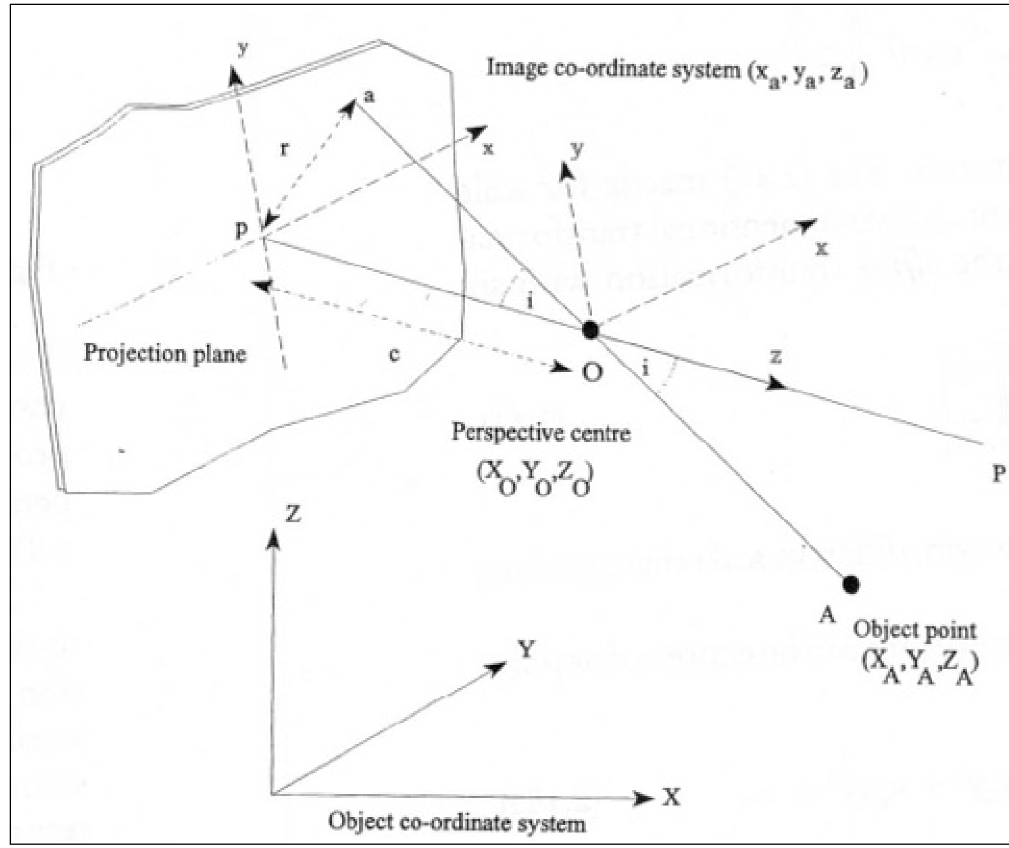
$$\begin{cases} X = \lambda x = \dfrac{Z}{c} x \\ Y = \lambda y = \dfrac{Z}{c} y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \lambda^{-1} X = \dfrac{c}{Z} X \\ y = \lambda^{-1} Y = \dfrac{c}{Z} Y \end{cases}$$



EQUAZIONI DI COLLINEARITA'

La trasformazione fra lo spazio immagine e lo spazio oggetto risulta:

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{vmatrix} + \lambda R^T(\varpi, \phi, \kappa) \cdot \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ -c \end{vmatrix}$$



NB: Indichiamo con R la matrice di rotazione per passare da sistema oggetto a sistema immagine

$\rightarrow R^T$ è la matrice per passare da sistema immagine a oggetto

EQUAZIONI DI COLLINEARITA'

Dall'ultima equazione:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda R^T(\varpi, \phi, \kappa) \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ -c \end{bmatrix}$$

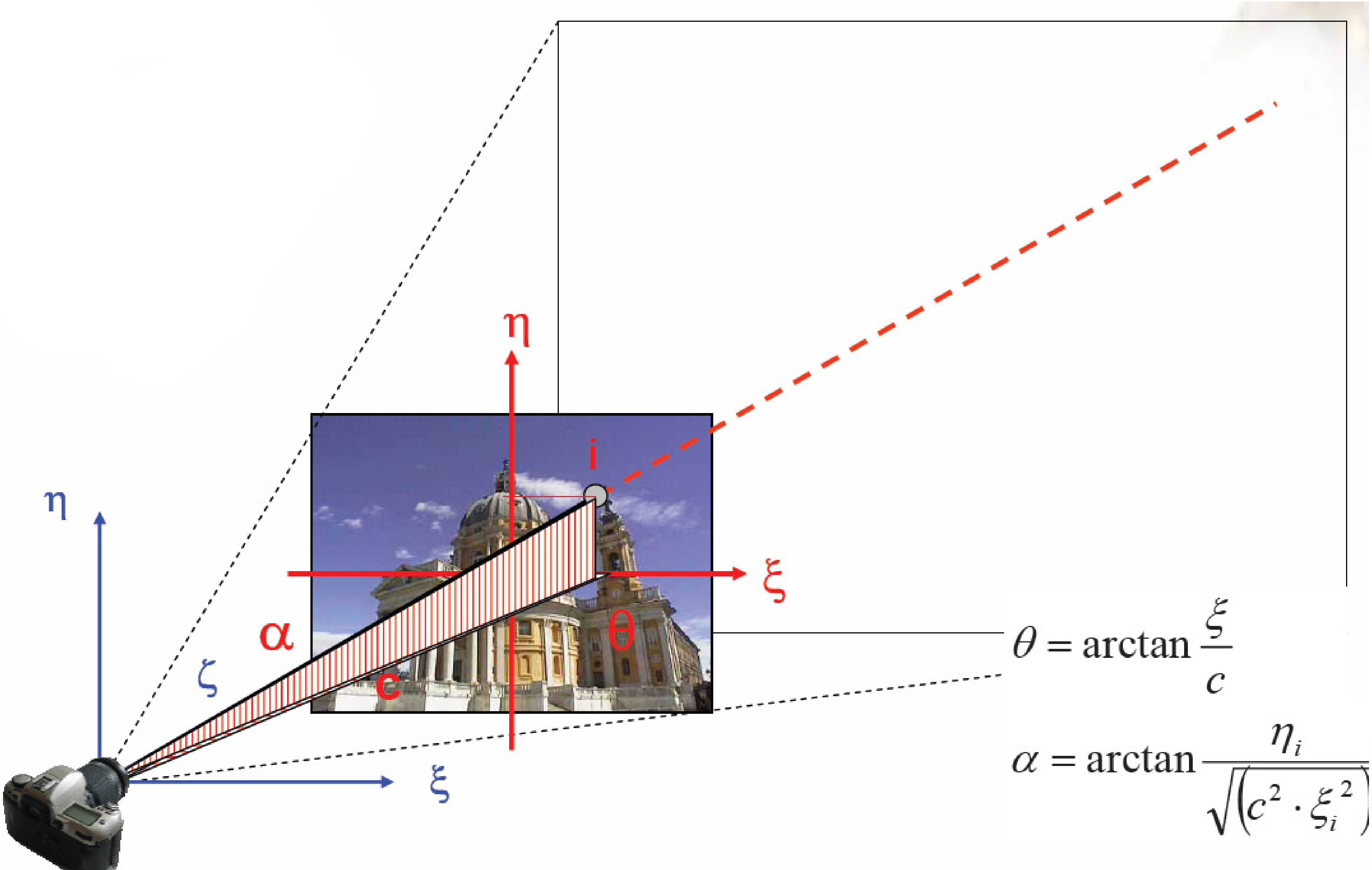
$$\begin{cases} \xi = x - x_0 \\ \eta = y - y_0 \end{cases}$$

Otteniamo, sviluppando:

$$X = X_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{11}(x - x_0) + r_{21}(y - y_0) - r_{31}c}{r_{13}(x - x_0) + r_{23}(y - y_0) - r_{33}c}$$

$$Y = Y_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{12}(x - x_0) + r_{22}(y - y_0) - r_{32}c}{r_{13}(x - x_0) + r_{23}(y - y_0) - r_{33}c}$$

EQUAZIONI DI COLLINEARITA’



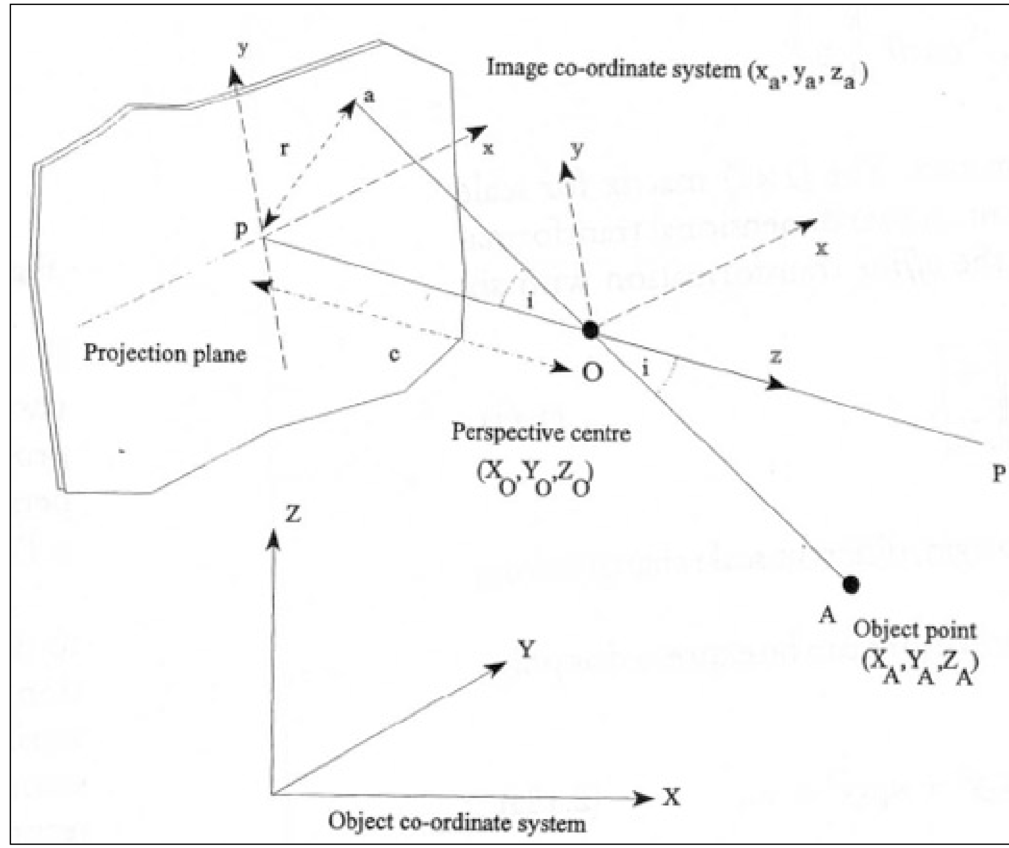
$$\theta = \arctan \frac{\xi}{c}$$

$$\alpha = \arctan \frac{\eta_i}{\sqrt{\left(c^2 \cdot \xi_i^{\,2}\right)}}$$

EQUAZIONI DI COLLINEARITA'

La trasformazione fra lo spazio oggetto e lo spazio immagine risulta:

$$\begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ -c \end{vmatrix} = \lambda^{-1} R(\varpi, \phi, \kappa) \cdot \begin{vmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{vmatrix}$$



EQUAZIONI DI COLLINEARITA'

Dall'ultima equazione:

$$\begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ -c \end{vmatrix} = \lambda^{-1} R(\varpi, \phi, \kappa) \cdot \begin{vmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \xi = x - x_0 \\ \eta = y - y_0 \end{cases}$$

Otteniamo, sviluppando:

$$\xi = x - x_0 = \frac{-c[r_{11}(X_0 - X) + r_{12}(Y_0 - Y) + r_{13}(Z_0 - Z)]}{[r_{31}(X_0 - X) + r_{32}(Y_0 - Y) + r_{33}(Z_0 - Z)]}$$

$$\eta = y - y_0 = \frac{-c[r_{21}(X_0 - X) + r_{22}(Y_0 - Y) + r_{23}(Z_0 - Z)]}{[r_{31}(X_0 - X) + r_{32}(Y_0 - Y) + r_{33}(Z_0 - Z)]}$$

EQUAZIONI DI COLLINEARITA’

Dall’ultima equazione:

$$\xi = x - x_0 = \frac{-c[r_{11}(X_0 - X) + r_{12}(Y_0 - Y) + r_{13}(Z_0 - Z)]}{[r_{31}(X_0 - X) + r_{32}(Y_0 - Y) + r_{33}(Z_0 - Z)]}$$

$$\eta = y - y_0 = \frac{-c[r_{21}(X_0 - X) + r_{22}(Y_0 - Y) + r_{23}(Z_0 - Z)]}{[r_{31}(X_0 - X) + r_{32}(Y_0 - Y) + r_{33}(Z_0 - Z)]}$$

Possiamo notare che le coordinate immagine di un punto dipendono da:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = f(x_0 \quad y_0 \quad c \quad X_0 \quad Y_0 \quad Z_0 \quad \varpi \quad \phi \quad \kappa)$$

PARAMETRI DI ORIENTAMENTO ESTERNO

PARAMETRI DI ORIENTAMENTO INTERNO

PROIEZIONE DI UN PIANO

LA PROIEZIONE DI UN PIANO (ASSUMIAMO IL PIANO XY) PER MEZZO DELLE EQ. DI COLLINEARITA' RISULTA:

$$OP = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le equazioni di collinearità ottenute precedentemente:

$$X = X_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{11}(x - x_0) + r_{21}(y - y_0) - r_{31}c}{r_{13}(x - x_0) + r_{23}(y - y_0) - r_{33}c}$$

$$Y = Y_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{12}(x - x_0) + r_{22}(y - y_0) - r_{32}c}{r_{13}(x - x_0) + r_{23}(y - y_0) - r_{33}c}$$

DIVENTANO:

$$X = X_0 - Z_0\frac{r_{11}(x - x_0) + r_{21}(y - y_0) - r_{31}c}{r_{13}(x - x_0) + r_{23}(y - y_0) - r_{33}c}$$

$$Y = Y_0 - Z_0\frac{r_{12}(x - x_0) + r_{22}(y - y_0) - r_{32}c}{r_{13}(x - x_0) + r_{23}(y - y_0) - r_{33}c}$$

PROIEZIONE DI UN PIANO

LA PROIEZIONE DI UN PIANO (ASSUMIAMO IL PIANO XY) PER MEZZO DELLE EQ. DI COLLINEARITA' RISULTA:

$$X = X_0 - Z_0 \frac{r_{11}(x - x_0) + r_{21}(y - y_0) - r_{31}c}{r_{13}(x - x_0) + r_{23}(y - y_0) - r_{33}c}$$

$$Y = Y_0 - Z_0 \frac{r_{12}(x - x_0) + r_{22}(y - y_0) - r_{32}c}{r_{13}(x - x_0) + r_{23}(y - y_0) - r_{33}c}$$

$$\begin{cases} \xi = (x - x_0) \\ \eta = (y - y_0) \end{cases}$$

Raccogliendo i coefficienti che moltiplicano $\xi\ ed\ \eta$

$$\begin{cases} \bar{a}_1 = r_{13}X_0 - r_{11}Z_0 \\ \bar{a}_2 = r_{23}X_0 - r_{12}Z_0 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{\bar{a}_1\xi + \bar{a}_2\eta + \bar{a}_3}{\bar{c}_1\xi + \bar{c}_2\eta + \bar{c}_3} \\ Y = \dfrac{\bar{b}_1\xi + \bar{b}_2\eta + \bar{b}_3}{\bar{c}_1\xi + \bar{c}_2\eta + \bar{c}_3} \end{cases}$$

PROIEZIONE DI UN PIANO

$$\begin{cases} X = \dfrac{\bar{a}_1\xi + \bar{a}_2\eta + \bar{a}_3}{\bar{c}_1\xi + \bar{c}_2\eta + \bar{c}_3} \\ Y = \dfrac{\bar{b}_1\xi + \bar{b}_2\eta + \bar{b}_3}{\bar{c}_1\xi + \bar{c}_2\eta + \bar{c}_3} \end{cases}$$

ELIMINANDO c_3:

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} X = \dfrac{a_1\xi + a_2\eta + a_3}{c_1\xi + c_2\eta + 1} \\ Y = \dfrac{b_1\xi + b_2\eta + b_3}{c_1\xi + c_2\eta + 1} \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} a_1 = {}^{\bar{a}_1}/_{\bar{c}_3} \\ a_2 = {}^{\bar{a}_2}/_{\bar{c}_3} \\ \quad\vdots \end{cases}$$

PROIEZIONE DI UN PIANO

OSSERVAZIONI:

1. Un fotogramma, in questo caso, è sufficiente a definire la ricostruzione dell'oggetto (piano).

2. Sono necessari 8 parametri indipendenti per descrivere la proiezione di un oggetto piano.

3. L'eliminazione di un parametro è dovuta al fatto che è sufficiente conoscere il rapporto Z_0/c invece di entrambe le grandezze.

PROIEZIONE DI UN PIANO

COSA SUCCEDE SE $\omega = \phi = 0$? ($c_3 = 1$)

$$R = \begin{vmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X = X_0 + \dfrac{Z_0}{c}[\cos\kappa \cdot \xi - \sin\kappa \cdot \eta] \\ Y = Y_0 + \dfrac{Z_0}{c}[\sin\kappa \cdot \xi + \cos\kappa \cdot \eta] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{vmatrix} + m_b \begin{vmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa \\ \sin\kappa & \cos\kappa \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix}$$

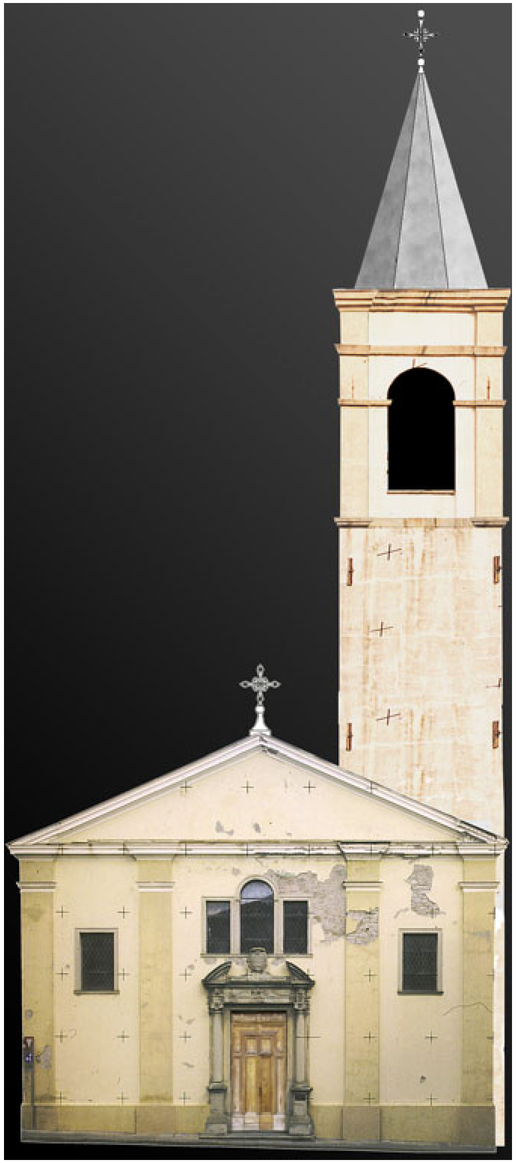
PROIEZIONE DI UN PIANO

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{vmatrix} + m_b \begin{vmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa \\ \sin\kappa & \cos\kappa \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix}$$

$$m_b = \frac{Z_0}{c}$$

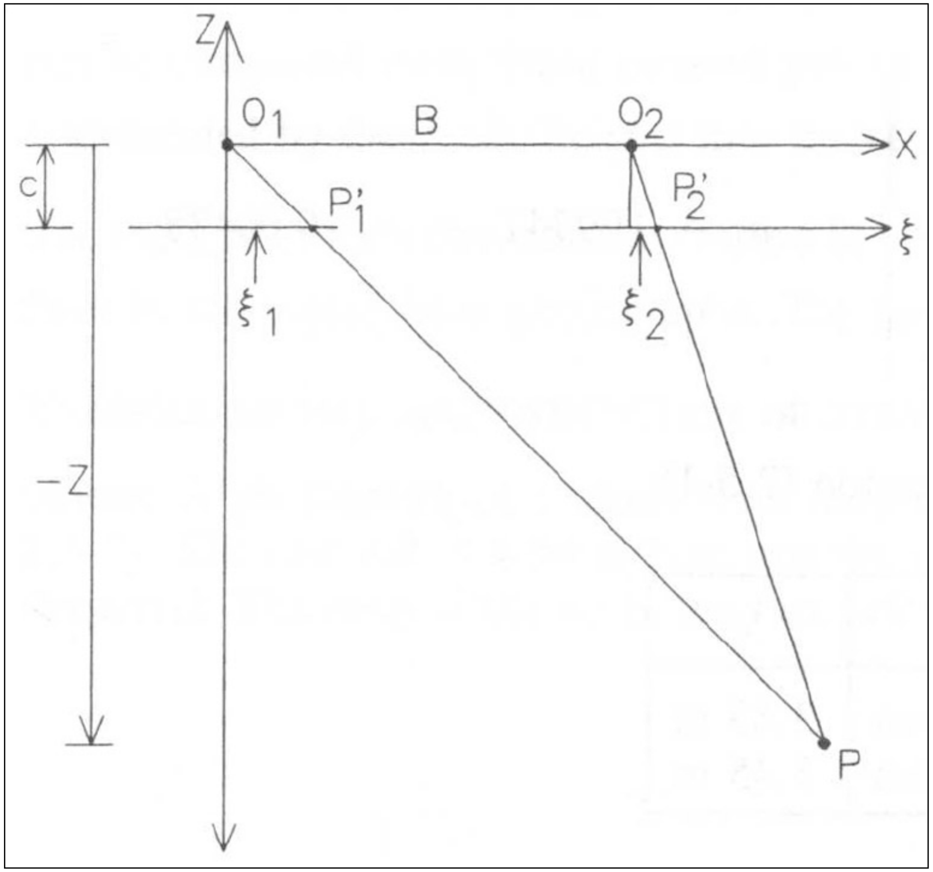
$$\frac{1}{m_b} = \frac{c}{Z_0}$$

SCALA IMMAGINE



IL CASO NORMALE DI FOTORESTITUZIONE

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI GLI ASSI DELLA CAMERA SIANO PERPENDICOLARI ALLA BASE CHE UNISCE I DUE CP E SIANO RECIPROCAMENTE PARALLELI



POSSIAMO POI SUPPORRE CHE GLI ASSI Z (TERRENO E IMMAGINE) COINCIDANO IN DIREZIONE E VERSO

$$X_{01} = Y_{01} = Y_{02} = Z_{01} = Z_{02} = 0$$
$$X_{02} = B$$
$$\varpi_1 = \varpi_2 = \phi_1 = \phi_2 = \kappa_1 = \kappa_2 = 0$$

IL CASO NORMALE DI FOTORESTITUZIONE

$$X_{01} = Y_{01} = Y_{02} = Z_{01} = Z_{02} = 0$$
$$X_{02} = B$$
$$\varpi_1 = \varpi_2 = \phi_1 = \phi_2 = \kappa_1 = \kappa_2 = 0$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$X = X_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{11}(x - x_0) + r_{21}(y - y_0) - r_{31}c}{r_{13}(x - x_0) + r_{23}(y - y_0) - r_{33}c}$$
$$Y = Y_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{12}(x - x_0) + r_{22}(y - y_0) - r_{32}c}{r_{13}(x - x_0) + r_{23}(y - y_0) - r_{33}c}$$

$$X = Z\frac{\xi_1}{-c} \qquad X = B + Z\frac{\xi_2}{-c}$$
$$Y = Z\frac{\eta_1}{-c} \qquad Y = Z\frac{\eta_2}{-c}$$

IL CASO NORMALE DI FOTORESTITUZIONE

$$X = Z\frac{\xi_1}{-c} \qquad X = B + Z\frac{\xi_2}{-c}$$

$$Y = Z\frac{\eta_1}{-c} \qquad Y = Z\frac{\eta_2}{-c}$$

$$\begin{cases} X = -Z\dfrac{\xi_1}{c} \qquad X = B + Z\dfrac{\xi_2}{-c} \\ Y = -Z\dfrac{\eta_1}{c} = -Z\dfrac{\eta_2}{c} \\ Z = \dfrac{c \cdot B}{\xi_2 - \xi_1} = -\dfrac{c \cdot B}{p_\xi} \end{cases}$$

Cosa significa la condizione

$$\eta_1 = \eta_2$$

PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA

$$\begin{cases} X = -Z\dfrac{\xi_1}{c} \\ Y = -Z\dfrac{\eta_1}{c} \\ Z = -\dfrac{c \cdot B}{p_\xi} \end{cases}$$

FACCIAMO L'IPOTESI CHE LA DISTANZA PRINCIPALE E LA BASE DI PRESA SIANO VALUTATE SENZA ERRORE; INOLTRE CONSIDERIAMO NON CORRELATE LE MISURE DELLE COORDINATE IMMAGINE ξ ED η.

LE PRECISIONI IN X, Y E Z RISULTANO:

$$\begin{cases} \sigma_Z = \dfrac{c \cdot B}{p_\xi^2}\sigma_{p_\xi} = \dfrac{Z^2}{c \cdot B}\sigma_{p_\xi} = m_b\dfrac{Z}{B}\sigma_{p_\xi} \\ \sigma_Y = \sqrt{\left(\dfrac{\eta_1}{c}\sigma_Z\right)^2 + \left(\dfrac{Z}{c}\sigma_\eta\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\eta_1}{c}m_b\dfrac{Z}{B}\sigma_{p_\xi}\right)^2 + \left(m_b \cdot \sigma_\eta\right)^2} \\ \sigma_X = \sqrt{\left(\dfrac{\xi_1}{c}\sigma_Z\right)^2 + \left(\dfrac{Z}{c}\sigma_\xi\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\xi_1}{c}m_b\dfrac{Z}{B}\sigma_{p_\xi}\right)^2 + \left(m_b \cdot \sigma_\xi\right)^2} \end{cases}$$

PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA

ESEMPIO NUMERICO:

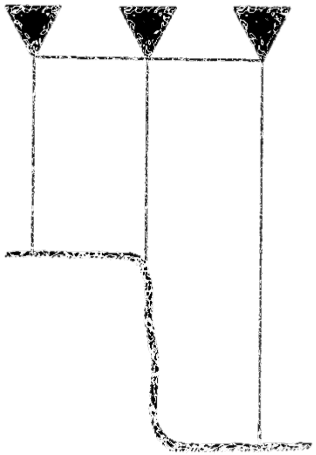
$$\xi_1 = \eta_1 = 50mm \pm 7\mu m$$
$$\sigma_{p_\xi} = \pm 5\mu m$$
$$c = 150mm$$

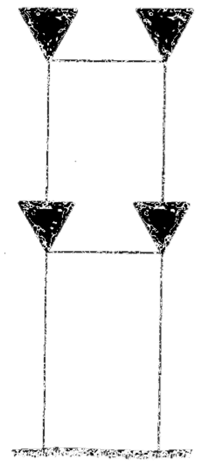
$$\begin{cases} \sigma_Z = \dfrac{c \cdot B}{p_\xi^2}\sigma_{p_\xi} = \dfrac{Z^2}{c \cdot B}\sigma_{p_\xi} = m_b \dfrac{Z}{B}\sigma_{p_\xi} \\ \sigma_Y = \sqrt{\left(\dfrac{\eta_1}{c}\sigma_Z\right)^2 + \left(\dfrac{Z}{c}\sigma_\eta\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\eta_1}{c} m_b \dfrac{Z}{B}\sigma_{p_\xi}\right)^2 + \left(m_b \cdot \sigma_\eta\right)^2} \\ \sigma_X = \sqrt{\left(\dfrac{\xi_1}{c}\sigma_Z\right)^2 + \left(\dfrac{Z}{c}\sigma_\xi\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\xi_1}{c} m_b \dfrac{Z}{B}\sigma_{p_\xi}\right)^2 + \left(m_b \cdot \sigma_\xi\right)^2} \end{cases}$$

m_b	B/Z = 1:1		B/Z = 1:3		B/Z = 1:10		B/Z = 1:20	
	σ_{xy}	σ_z	σ_{xy}	σ_z	σ_{xy}	σ_z	σ_{xy}	σ_z
50000	0.36	0.25	0.43	0.75	0.90	2.50	1.70	5.00 m
10000	0.72	0.50	0.86	1.50	1.81	5.00	3.41	10.00 dm
1000	0.72	0.50	0.86	1.50	1.81	5.00	3.41	10.00 cm
100	0.72	0.50	0.86	1.50	1.81	5.00	3.41	10.00 mm
25	0.18	0.13	0.22	0.38	0.45	1.25	0.85	2.50 mm

PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA

ERRORE PROPORZIONALE AL QUADRATO DI Z:





$$\sigma_Z = \frac{Z}{c}\frac{Z}{B}\sigma_{p_\xi}$$

ERRORE PROPORZIONALE A Z: