CORSO DI FOTOGRAMMETRIA E TELERILEVAMENTO

Prof. Riccardo Roncella

INTRODUZIONE AL CORSO

INFORMAZIONI GENERALI

Insegnamento: Fotogrammetria e Telerilevamento (CFU: 9)

Corso di Laurea Mag. in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

Orario delle lezioni:

Martedì	**ore 14.00 – 17.00**	**Aula B/4**
Mercoledì	**ore 09.00 – 12.00**	**Aula B/4**

Orario di ricevimento:

DA CONCORDARE CON IL DOCENTE

Docente: Prof. Ing. Riccardo Roncella

Tel: 0521 905972 e-mail: riccardo.roncella@unipr.it

MODALITA’ D’ESAME

APPELLI D’ESAME:

A PARTIRE DAL 21.12.2020 DA CONCORDARE CON IL DOCENTE

MODALITA’ DI VALUTAZIONE:

ESERCITAZIONI:	40%
VERIFICA ORALE:	60%

- Durante le esercitazioni si approfondiranno le tematiche del corso mediante l’utilizzo di software fotogrammetrici

- La verifica orale individuale finale verterà sia sulle tematiche maggiormente approfondite durante le esercitazioni sia su quelle generali del corso.

TESTI CONSIGLIATI

- K. KRAUS, *Fotogrammetria - Vol.I*
  Ed. Levrotto & Bella, Torino,1994.

- A. Selvini, F. Guzzetti, *Fotogrammetria Generale.*
  UTET, 2002, Torino.

- *Dispense (formato pdf) e copie dei lucidi delle presentazioni –* https://elly.dia.unipr.it

SEMINARI, VISITE ed ESERCITAZIONI

- ESERCITAZIONE SUL LASER A SCANSIONE
- SEMINARI DIDATTICI
- USO DI DRONI PER IL RILIEVO E IL MONITORAGGIO AMBIENTALE

FOTOGRAMMETRIA

- **CHE COS'E' LA FOTOGRAMMETRIA?**
- **COSA STUDIA?**
- **A COSA SERVE?**

DEFINIZIONE:

La fotogrammetria è quella disciplina che studia le metodologie e le tecniche per ottenere informazioni dimensionali o qualitative da una o più immagini.

Le tecniche di misura fotogrammetriche sono quindi di tipo indiretto (nel senso che avvengono senza un reale contatto con l'oggetto da studiare).

FOTOGRAMMETRIA

- **CHE COS'E' LA FOTOGRAMMETRIA?**
- **COSA STUDIA?**
- **A COSA SERVE?**

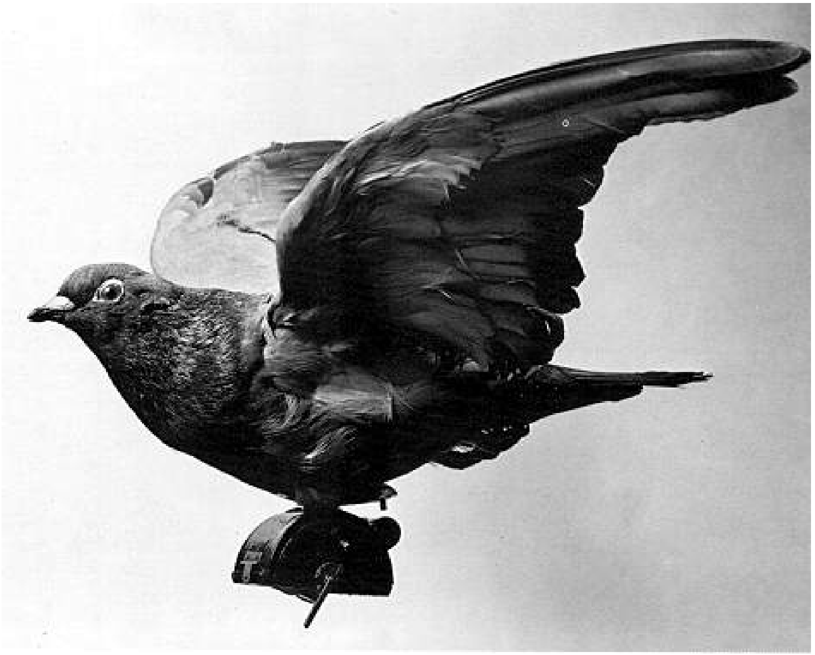
In virtù del crescente progresso tecnologico i campi di azione della fotogrammetria si sono sempre più ampliati.

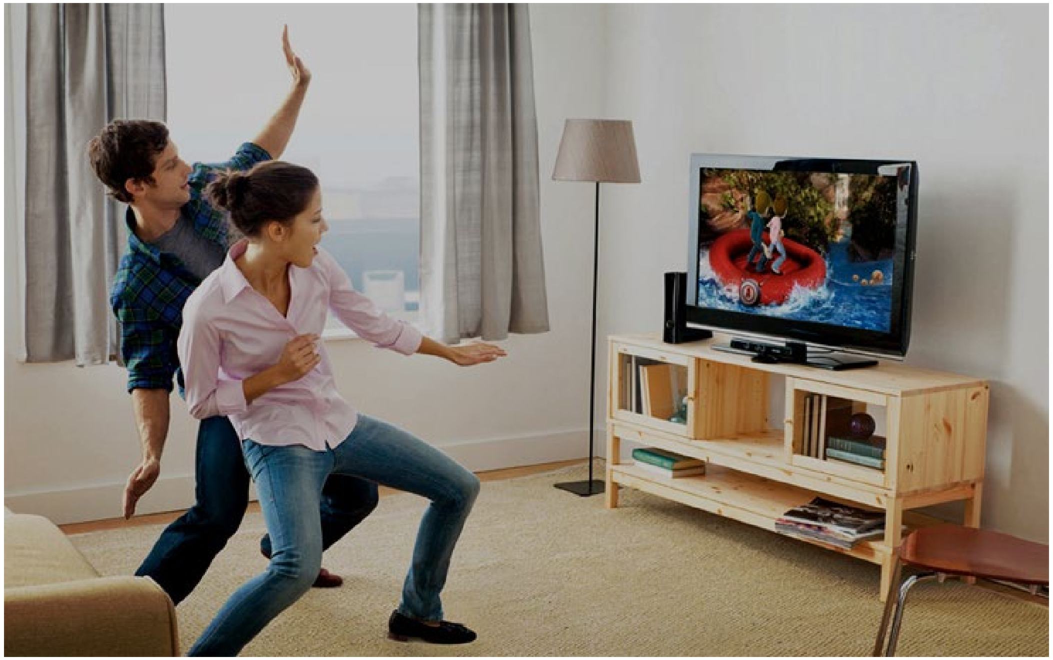
DEFINIZIONE (+ moderna):

La fotogrammetria è quella scienza che studia le metodologie e le tecniche per ottenere, con il più elevato grado di automazione possibile, informazioni dimensionali o qualitative da dati multi-sensoriali o sistemi complessi.

(A. F. Habib)

- CHE COS'E' LA FOTOGRAMMETRIA?
- COSA STUDIA?
- A COSA SERVE?





- CHE COS'E' IL TELERILEVAMENTO?
- COSA STUDIA?
- A COSA SERVE?

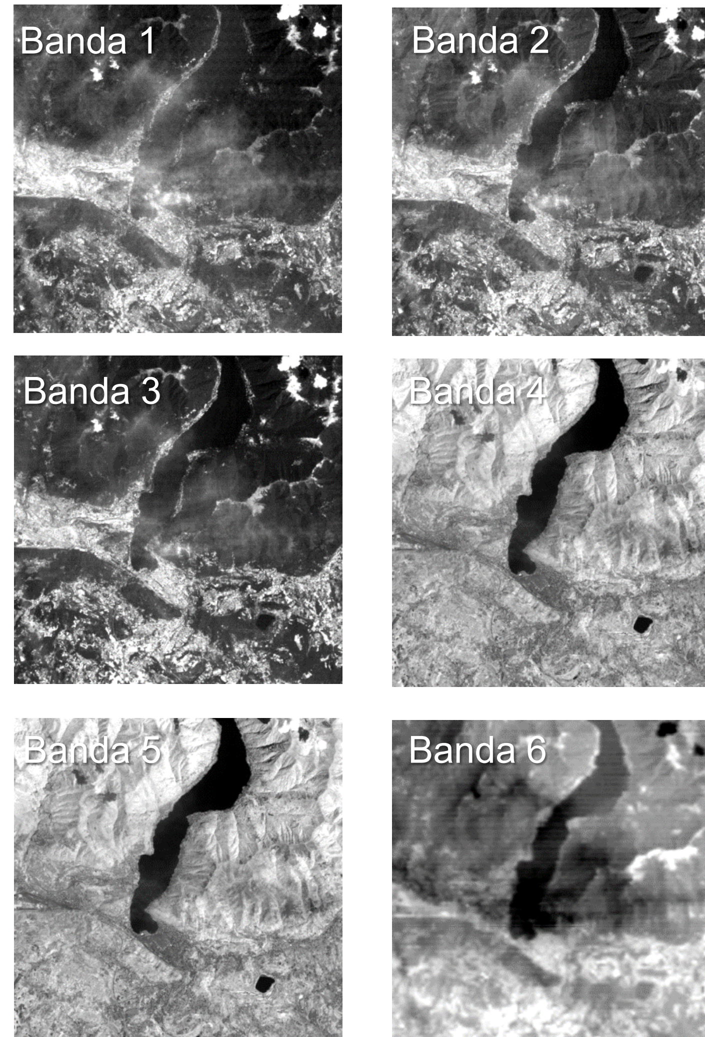
DEFINIZIONE:

Il Telerilevamento (Remote Sensing) è quell'insieme di tecniche, strumenti e mezzi interpretativi che permettono di estendere e migliorare le capacità percettive dell'occhio, fornendo all'osservatore informazioni qualitative e quantitative su oggetti posti a distanza.

(Lechi et al.)

TELERILEVAMENTO

- **CHE COS'E' IL TELERILEVAMENTO?**
- **COSA STUDIA?**
- **A COSA SERVE?**

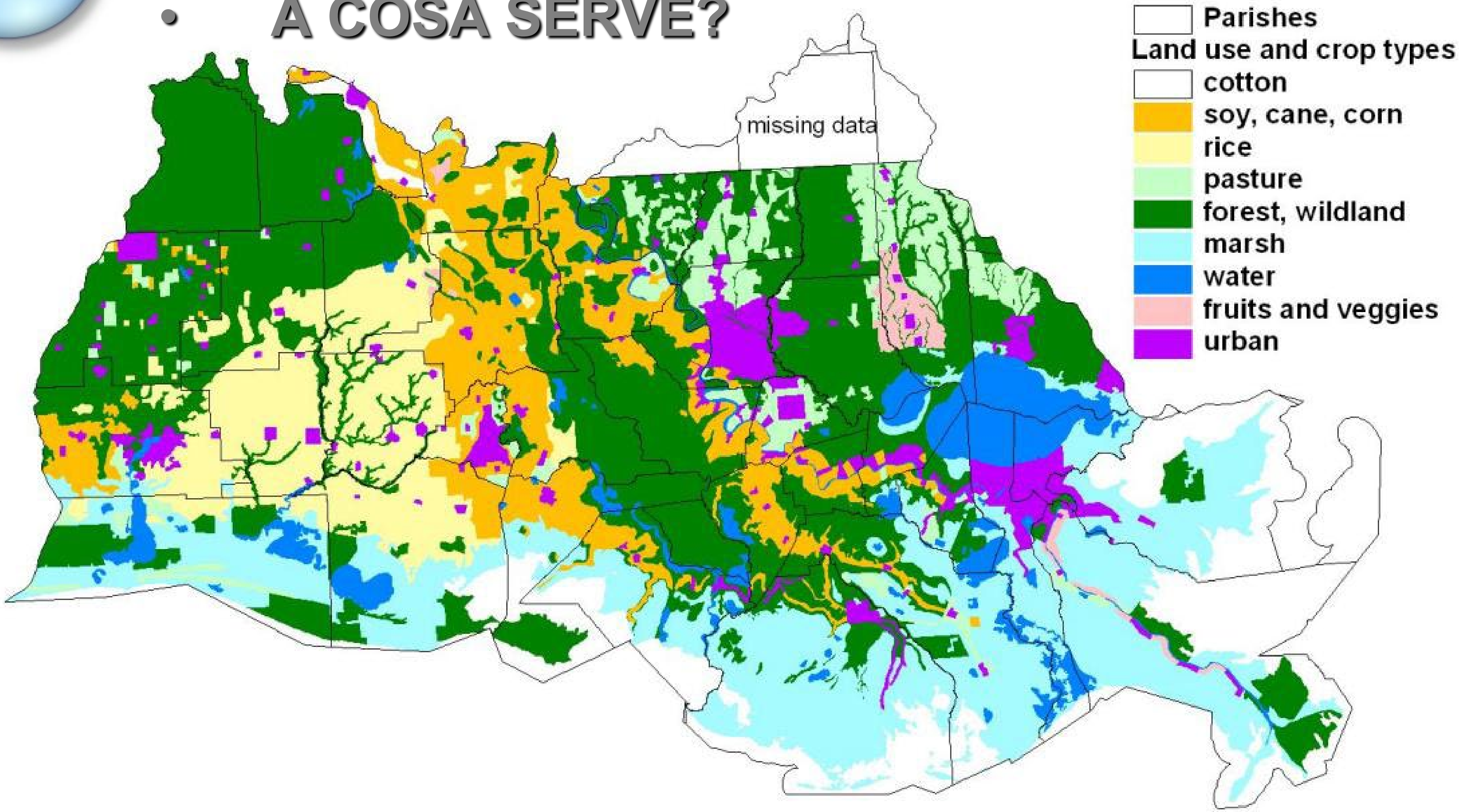


TELERILEVAMENTO

- CHE COS'E' IL TELERILEVAMENTO?
- COSA STUDIA?
- A COSA SERVE?

TELERILEVAMENTO

- **CHE COS'E' IL TELERILEVAMENTO?**
- **COSA STUDIA?**
- **A COSA SERVE?**



ALCUNI CAMPI DI APPLICAZIONE DELLA FOTOGRAMMETRIA

- Cartografia, sistemi informativi territoriali, etc…
- Rilievo architettonico
- Conservazione dei beni culturali
- Archeologia
- Controllo del traffico
- Controllo di sistemi industriali
- Controllo strutturale
- Applicazioni mediche
- Scienze forensi
- Supporto alla navigazione (robotica o veicolare)
- Modellazione e Computer Grafica
- Tracciamento di eventi dinamici (crash test, etc…)
- Controlli di qualità nei sistemi produttivi
- …

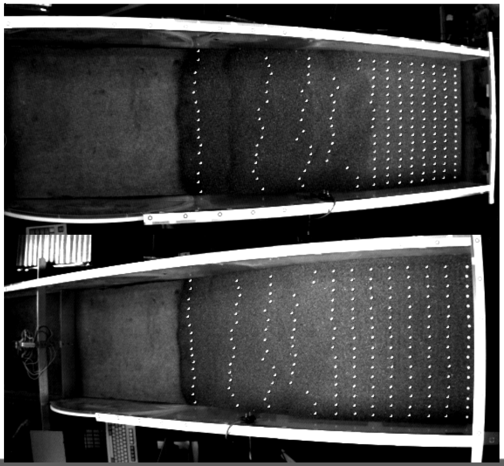
CAMPI DI APPLICAZIONE DELLA FOTOGRAMMETRIA

PER LA PRECEDENTE DEFINIZIONE, LA FOTOGRAMMETRIA RIGUARDA UN AMPIO SPETTRO DI APPLICAZIONI DIFFERENTI.

CLASSIFICAZIONE IN FUNZIONE DEL TIPO DI ACQUISIZIONE

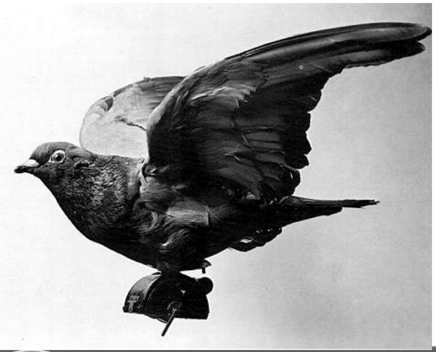
IMMAGINI TERRESTRI (o Close-Range)

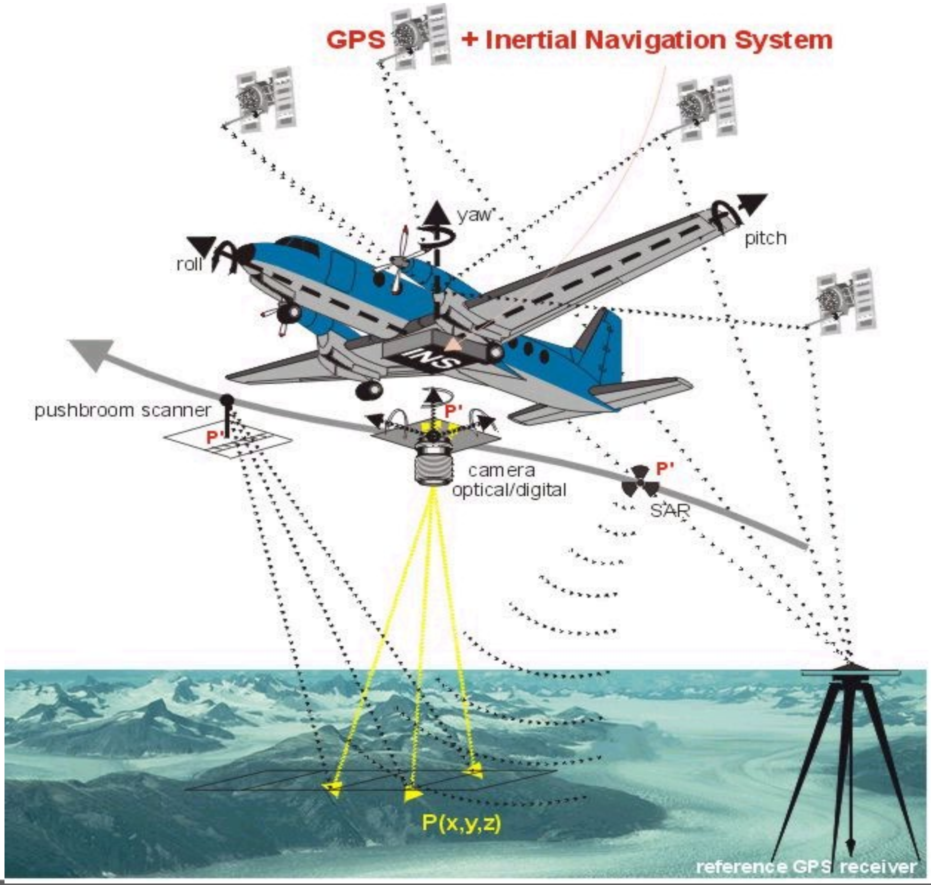
Il fotogramma viene acquisito da terra, nelle immediate vicinanze dell'oggetto che si vuole misurare (Fotogrammetria dei vicini)



IMMAGINI AEREE

Il fotogramma viene acquisito da aereo per fini cartografici o catastali.





IMMAGINI SATELLITARI

Il fotogramma viene acquisito da satellite.

CAMPI DI APPLICAZIONE DELLA FOTOGRAMMETRIA

RANGE-IMAGES (IMMAGINI DI DISTANZA)

Prodotte da strumenti particolari (solitamente laser a scansione) ad ogni elemento dell’immagine è associata la distanza (e indirettamente XYZ) oltre, in certi casi, alle informazioni colorimetriche di un punto.

I PRODOTTI

Tecniche per acquisire dati spaziali:

- Rilievi topografici tradizionali
  (livello, teodolite, …)
- Posizionamento GPS
- Rilievi fotogrammetrici
- Laser a scansione

I PRODOTTI

Che tipo di dati si possono ottenere?

Principalmente:

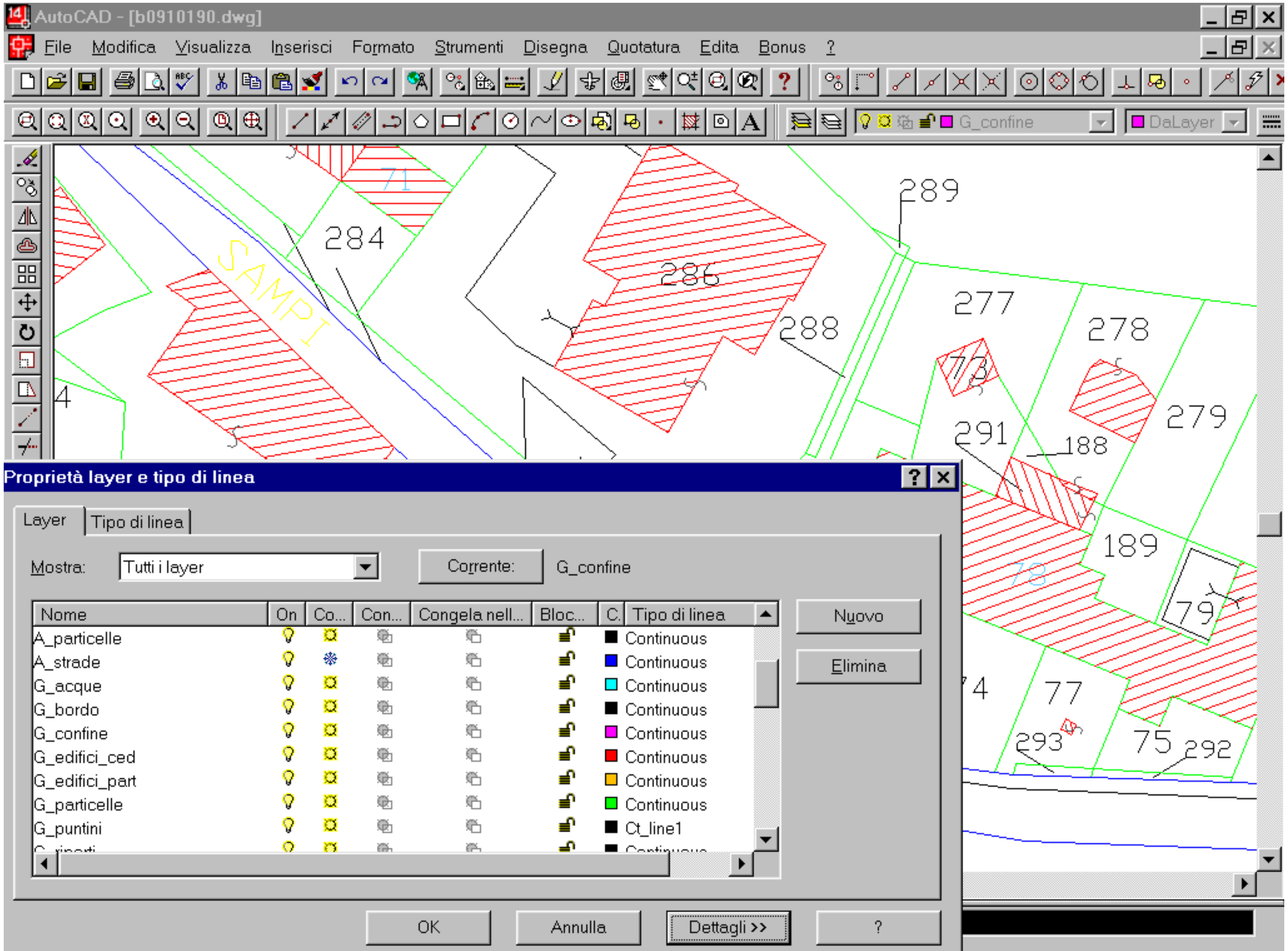
- Dati di posizione (Coordinate)
- Elementi geometrici (punti, linee, aree, etc…)

Ma anche…

- Immagini con contenuti metrici (Raddrizzamenti, ortofotocarte, etc…)
- Informazioni di tipo tematico (Carte tematiche, etc…)
- Modelli tridimensionali fotorealistici (3D city models, computer grafica, etc…)

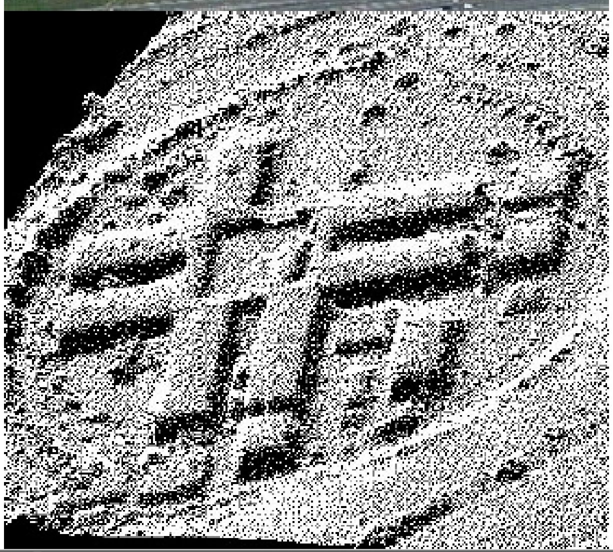
I PRODOTTI DELLA FOTOGRAMMETRIA AEREA

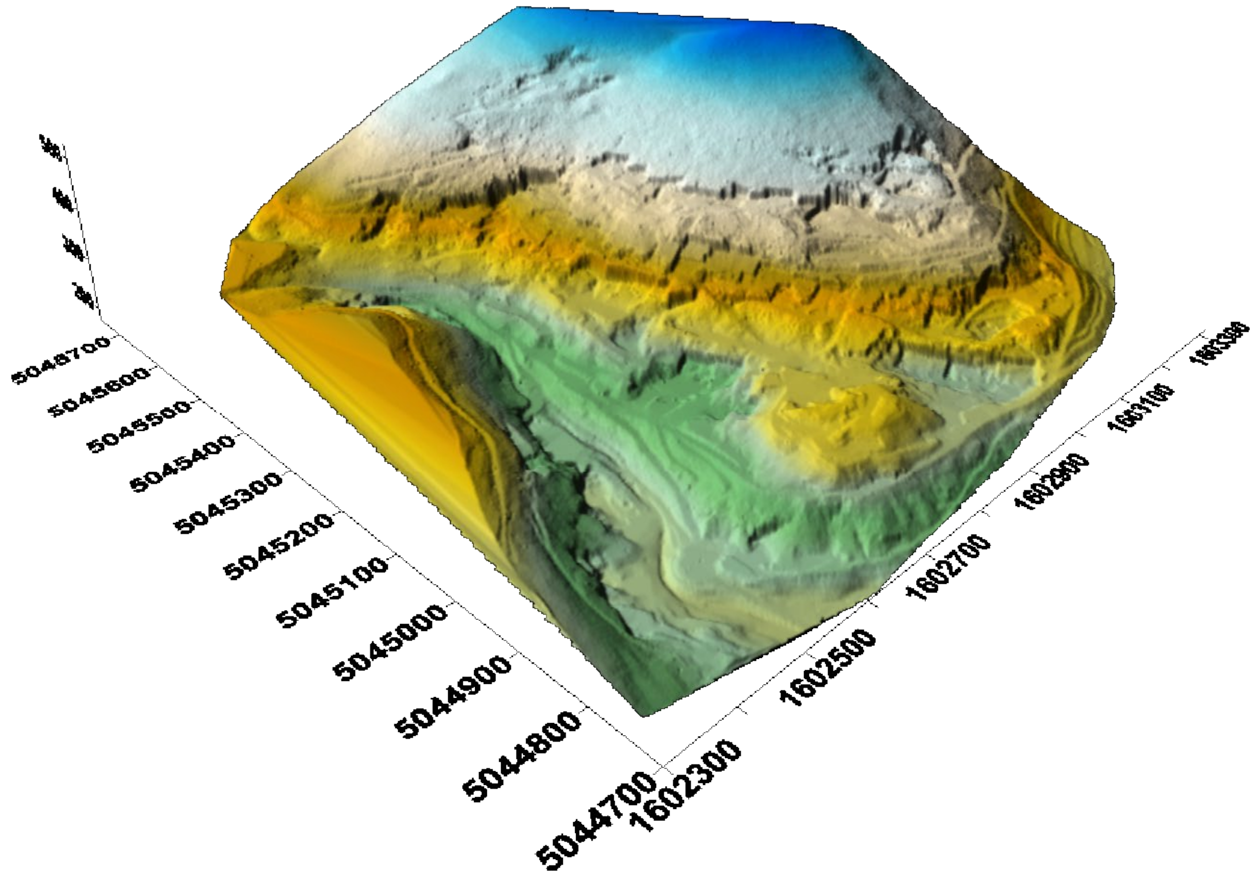
1. PRODUZIONE E AGGIORNAMENTO DI CARTOGRAFIA AL TRATTO, VETTORIALE E DI STRATI INFORMATIVI NEI SIT:



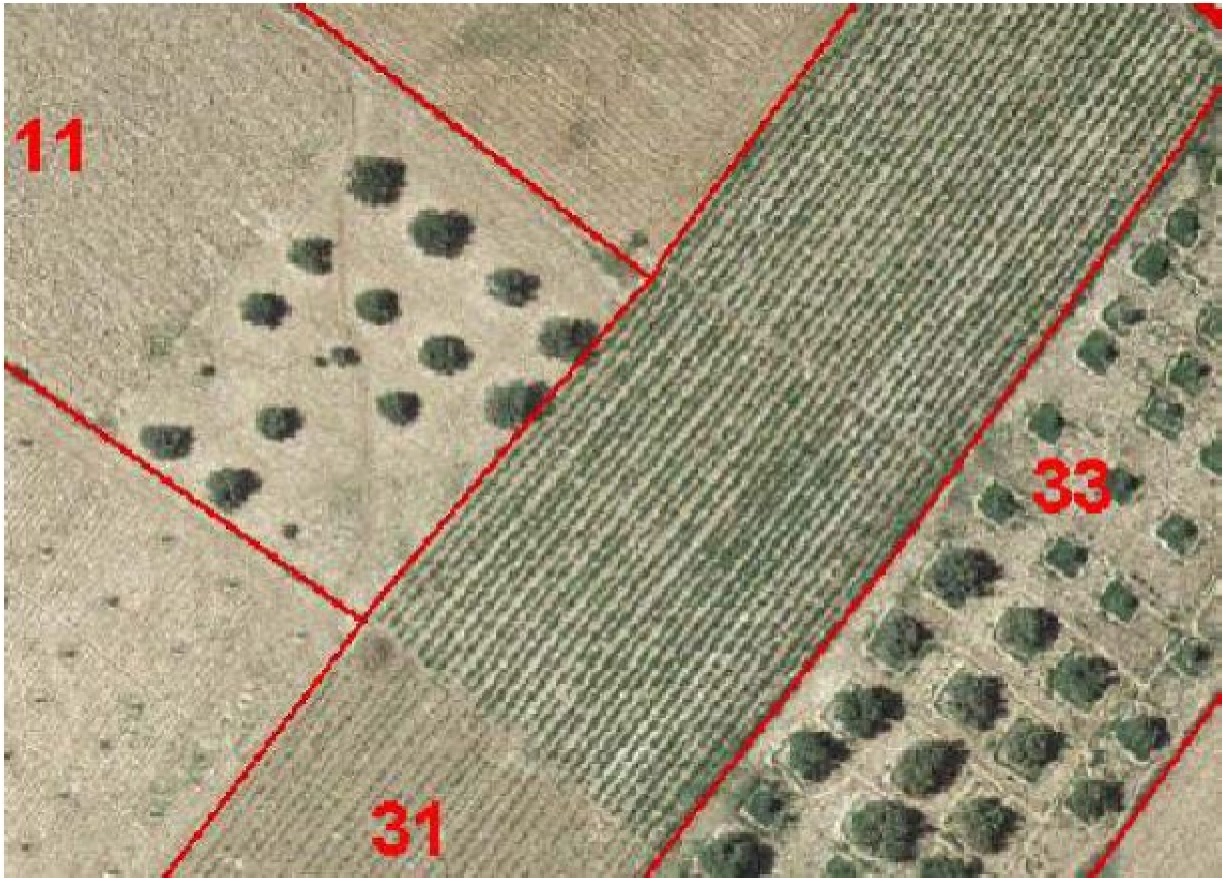
I PRODOTTI DELLA FOTOGRAMMETRIA AEREA

2. MODELLI DIGITALI DEL TERRENO (DSM, DTM, DEM)

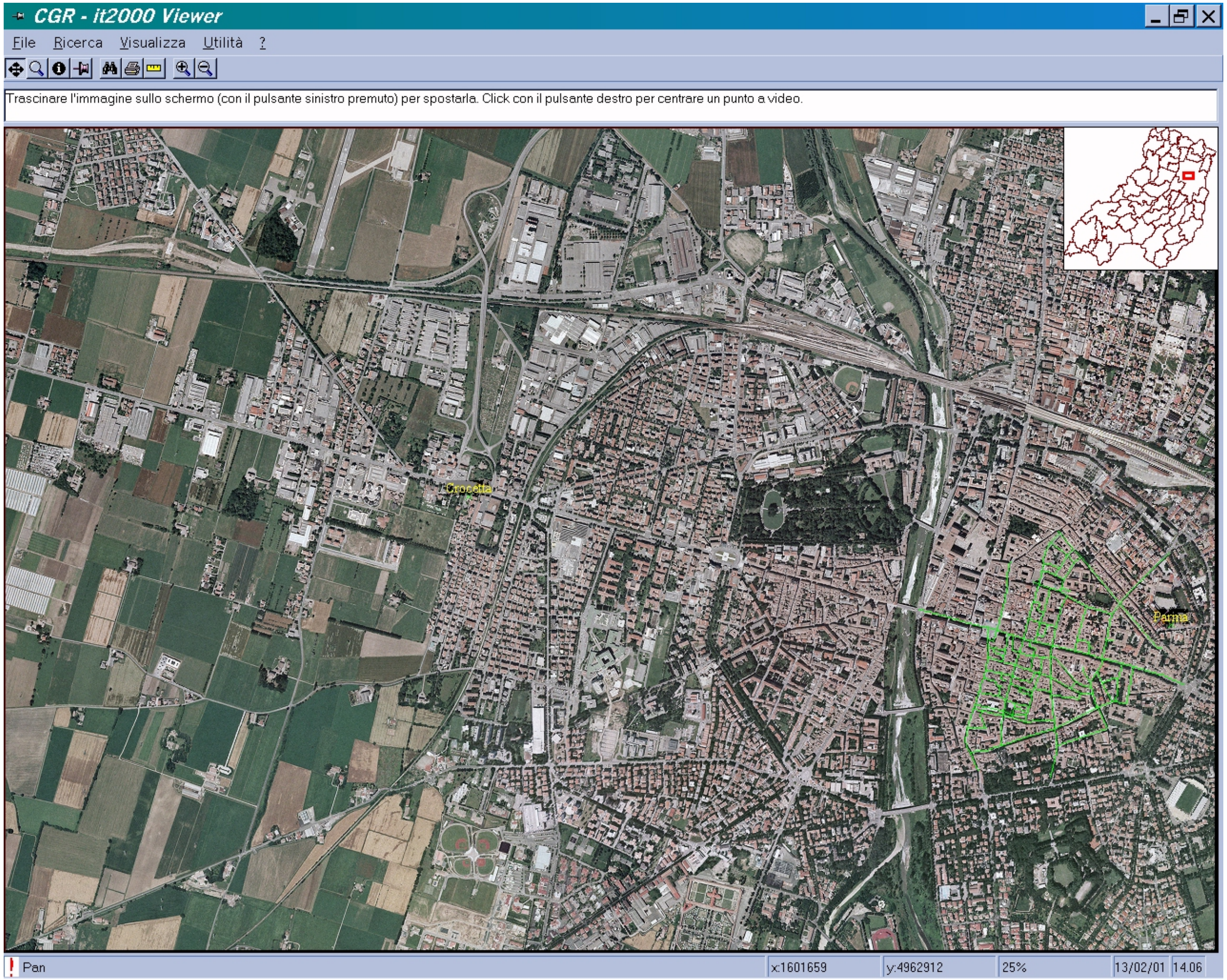




3. CARTE TEMATICHE, CLASSIFICAZIONE (FOTOINTERPRETAZIONE)

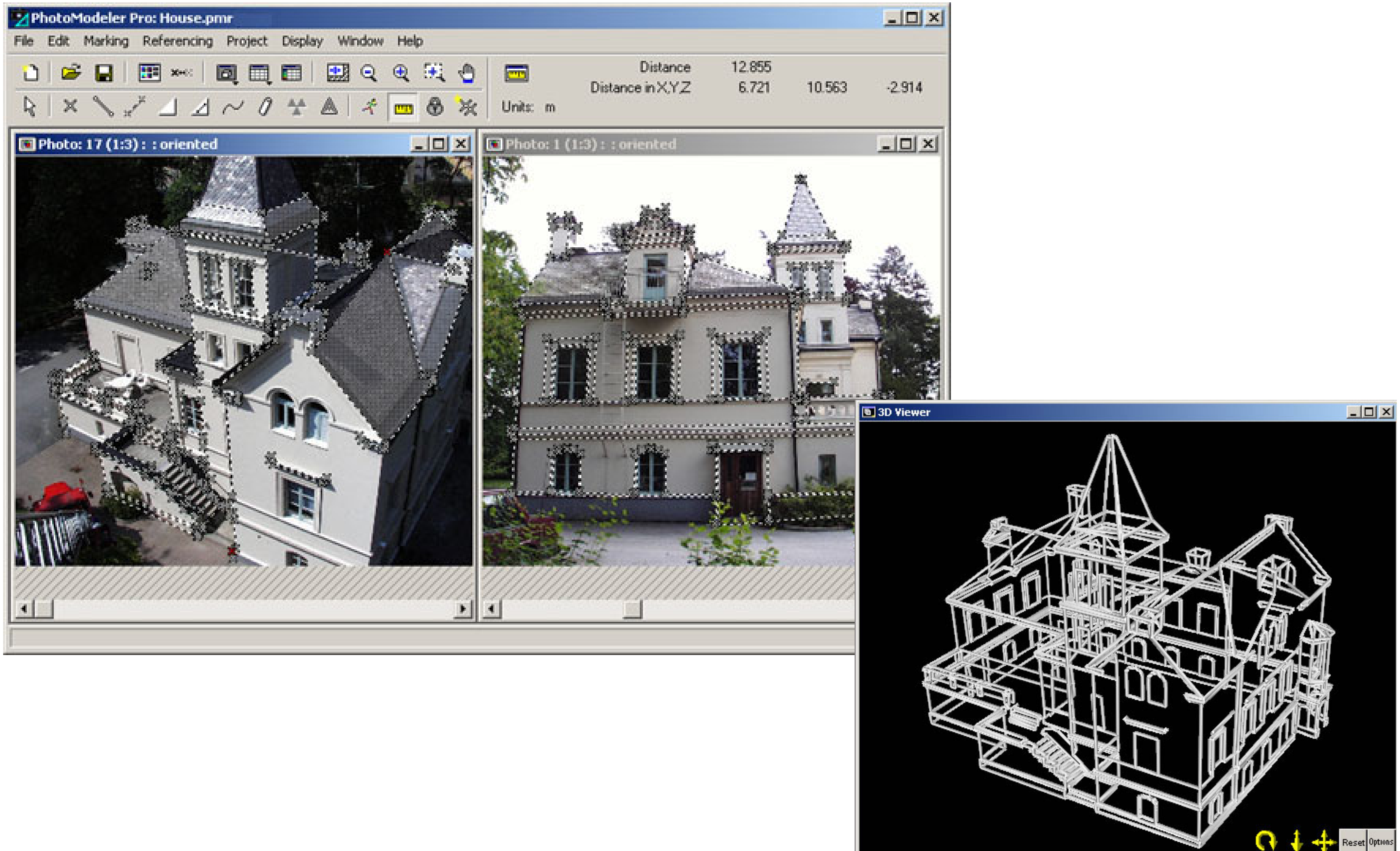


4. ORTOFOTOCARTE



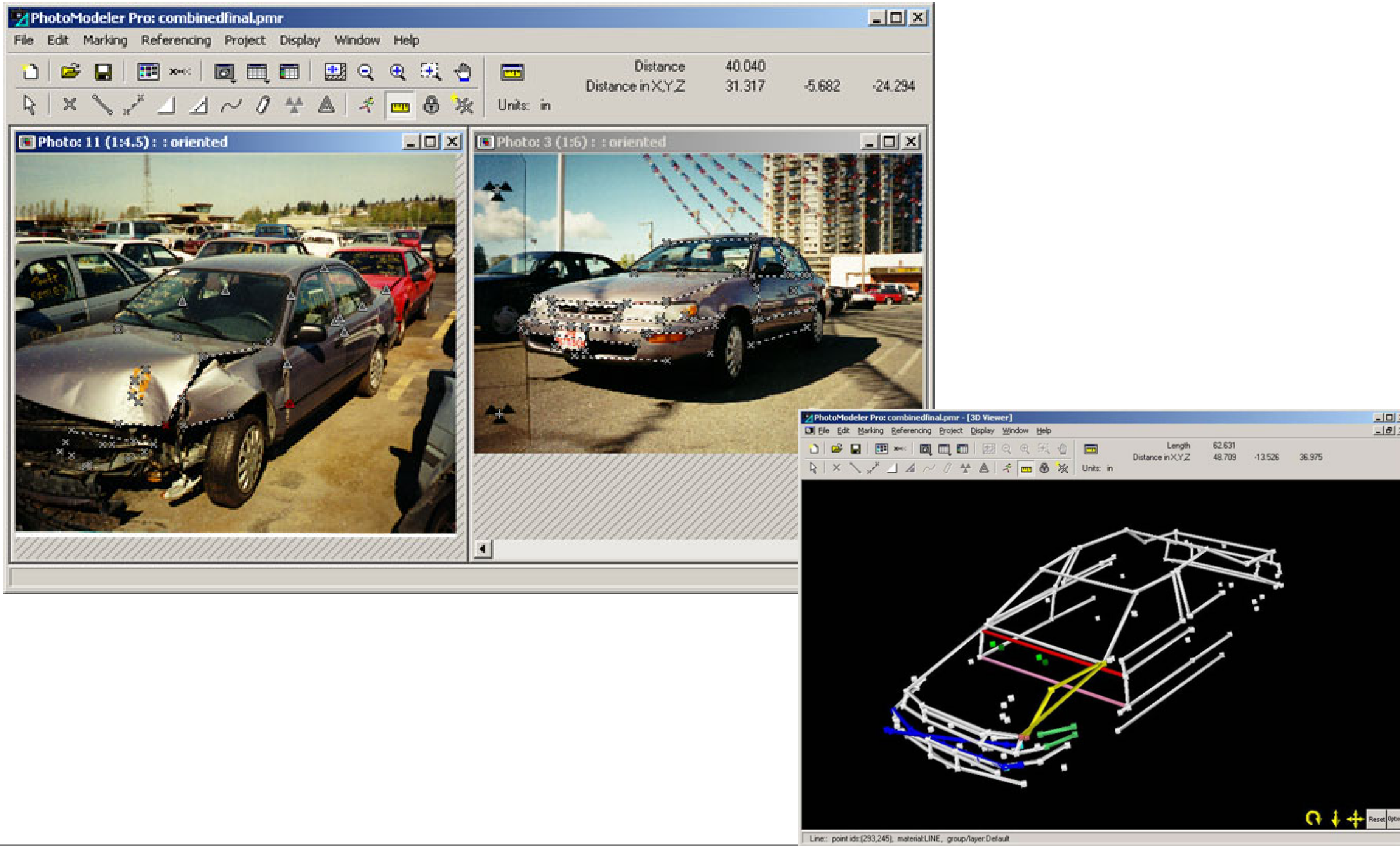
I PRODOTTI DELLA FOTOGRAMMETRIA TERRESTRE

1. RESTITUZIONE TRIDIMENSIONALE DI OGGETTI



I PRODOTTI DELLA FOTOGRAMMETRIA TERRESTRE

1. RESTITUZIONE TRIDIMENSIONALE DI OGGETTI



I PRODOTTI DELLA FOTOGRAMMETRIA TERRESTRE

2. RADDRIZZAMENTI

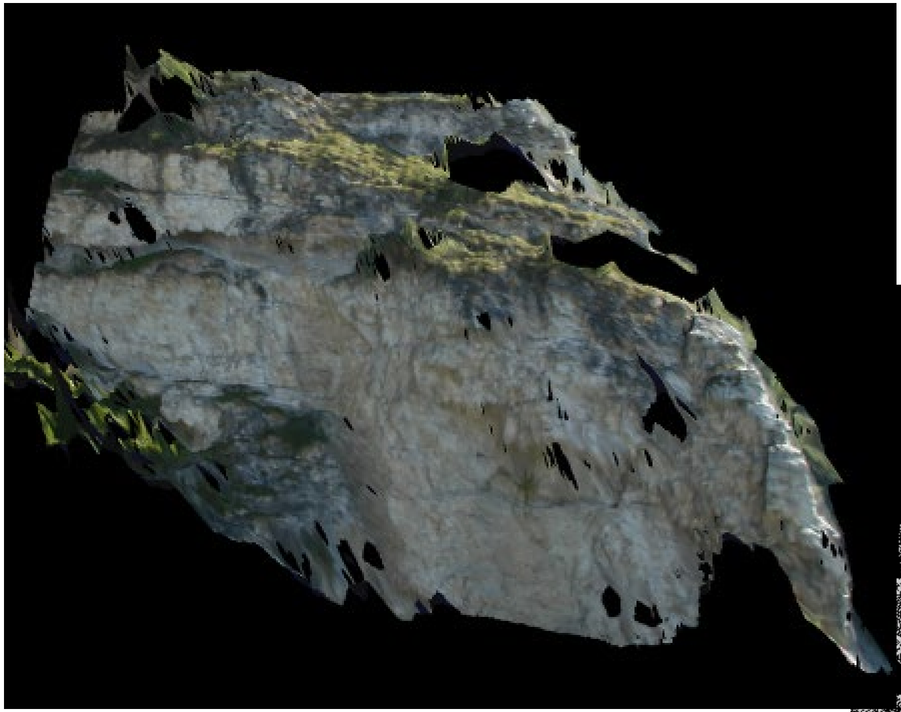
INTEGRAZIONE FOTOGRAMMETRIA AEREA E TERRESTRE

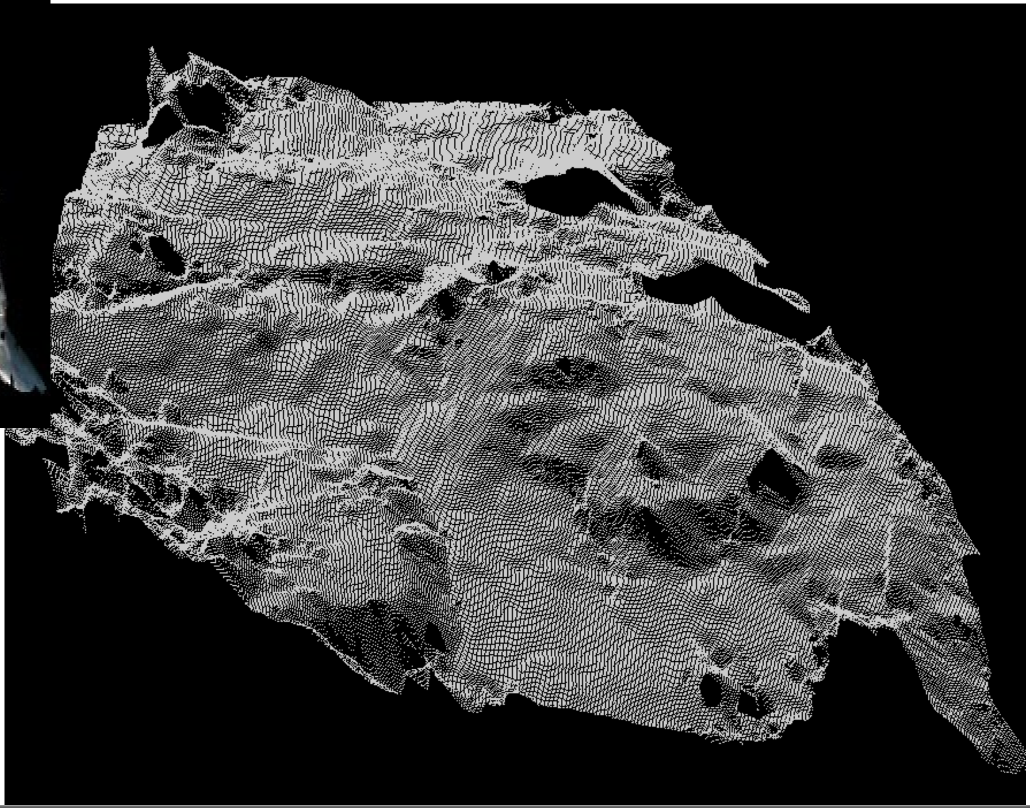
I PRODOTTI DELLA FOTOGRAMMETRIA TERRESTRE

2. RADDRIZZAMENTI

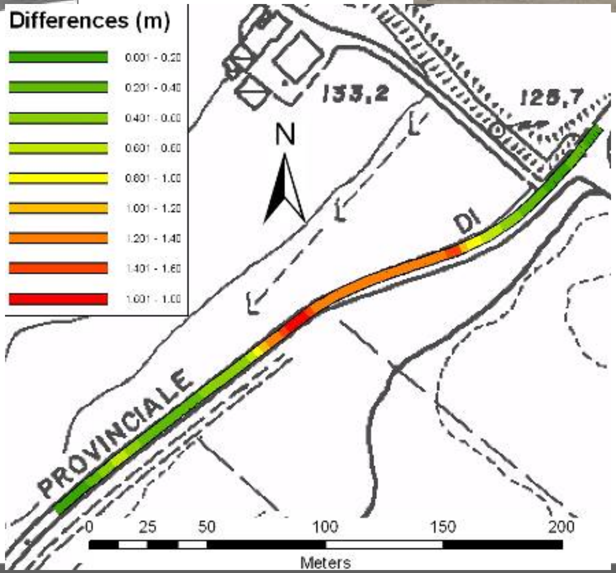
I PRODOTTI DELLA FOTOGRAMMETRIA TERRESTRE

3. MODELLI DIGITALI DI SUPERFICI (DSM, Nuvole di punti)



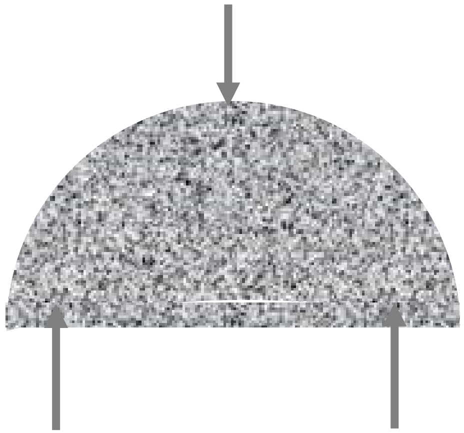


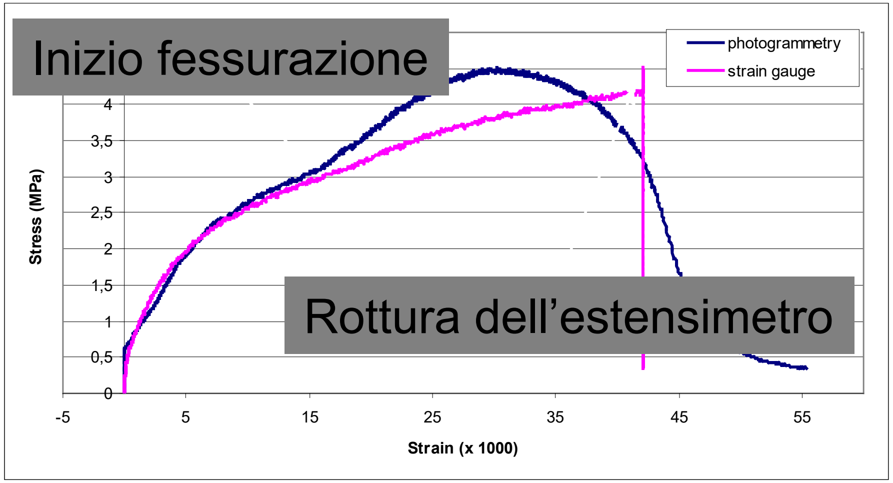
4. SUPPORTO ALLA PRODUZIONE DI DATABASE CARTOGRAFICI (SIT)

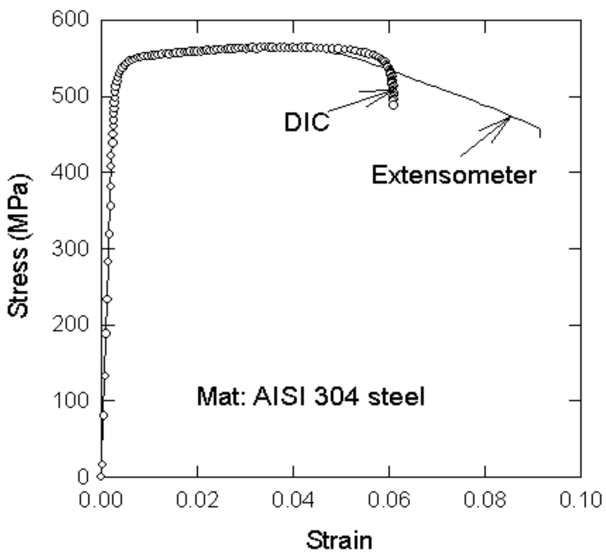


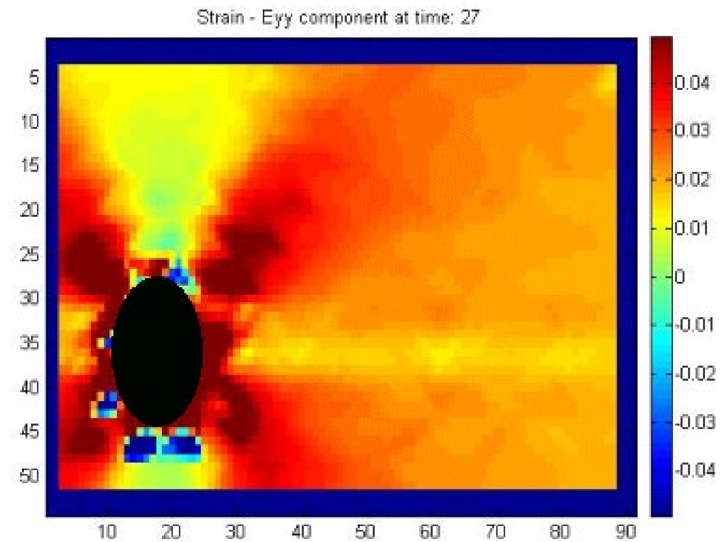
I PRODOTTI DELLA FOTOGRAMMETRIA TERRESTRE

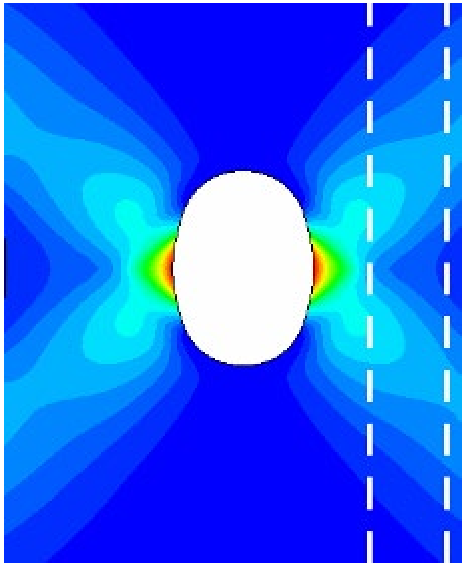
5. APPLICAZIONI VARIE











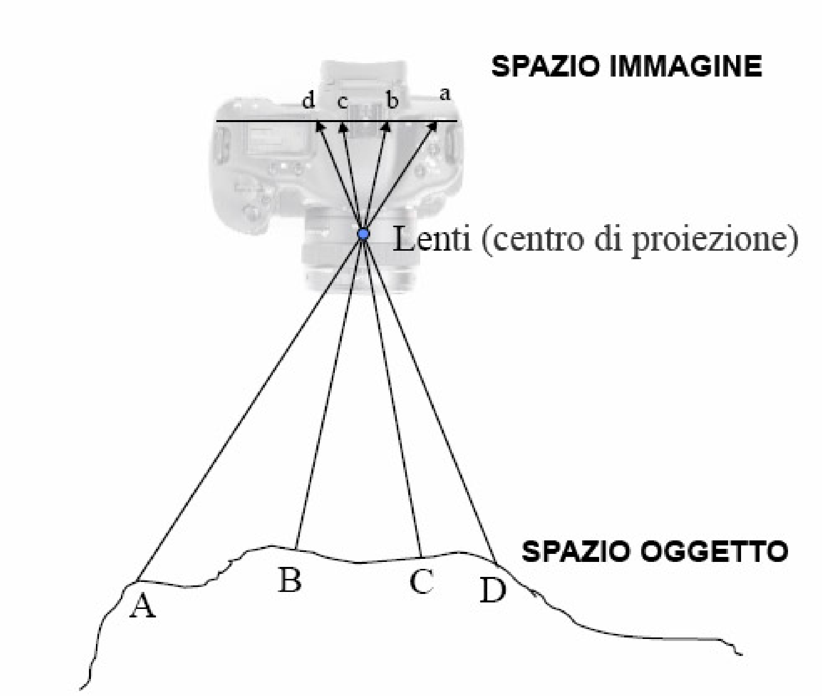
ANALISI DI DEFORMAZIONE IN PROVE DI CARICO

FORMAZIONE DELL’IMMAGINE SUL FOTOGRAMMA

Si suppone che in un sistema ottico ideale la formazione dell’immagine sul fotogramma rispetti la condizione di collinearità:

CONDIZIONE DI COLLINEARITA’:

Punto Oggetto, Centro di Proiezione e Punto immagine sono allineati.

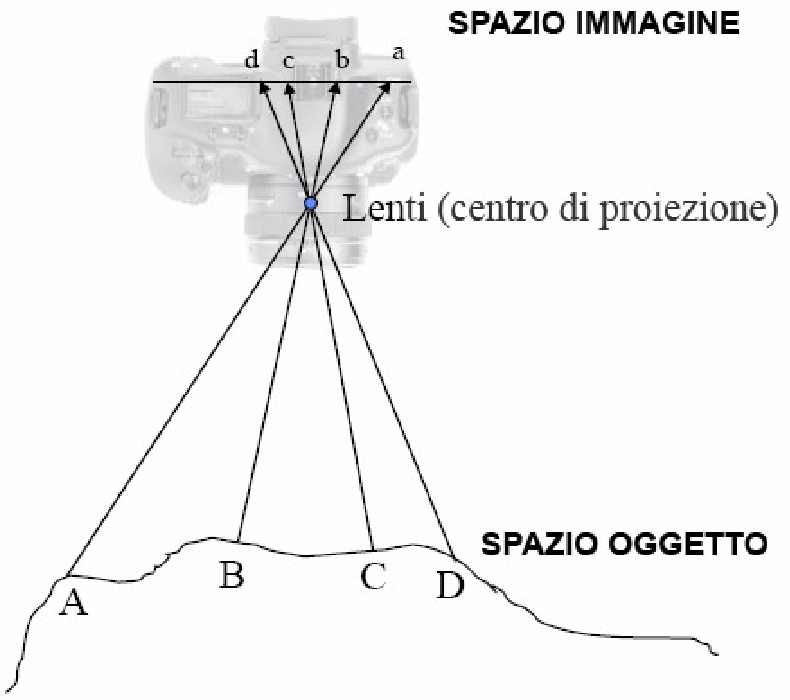


FORMAZIONE DELL'IMMAGINE SUL FOTOGRAMMA

Lo scopo principale della fotogrammetria è di invertire il processo di formazione dell'immagine ottenendo le coordinate dei punti oggetto (A,B,C,D) a partire dalla conoscenza delle coordinate immagine (cioè di a,b,c,d).

Se non si fanno ulteriori ipotesi sui punti terreno non si è in grado di ottenere con un solo fotogramma le informazioni richieste.

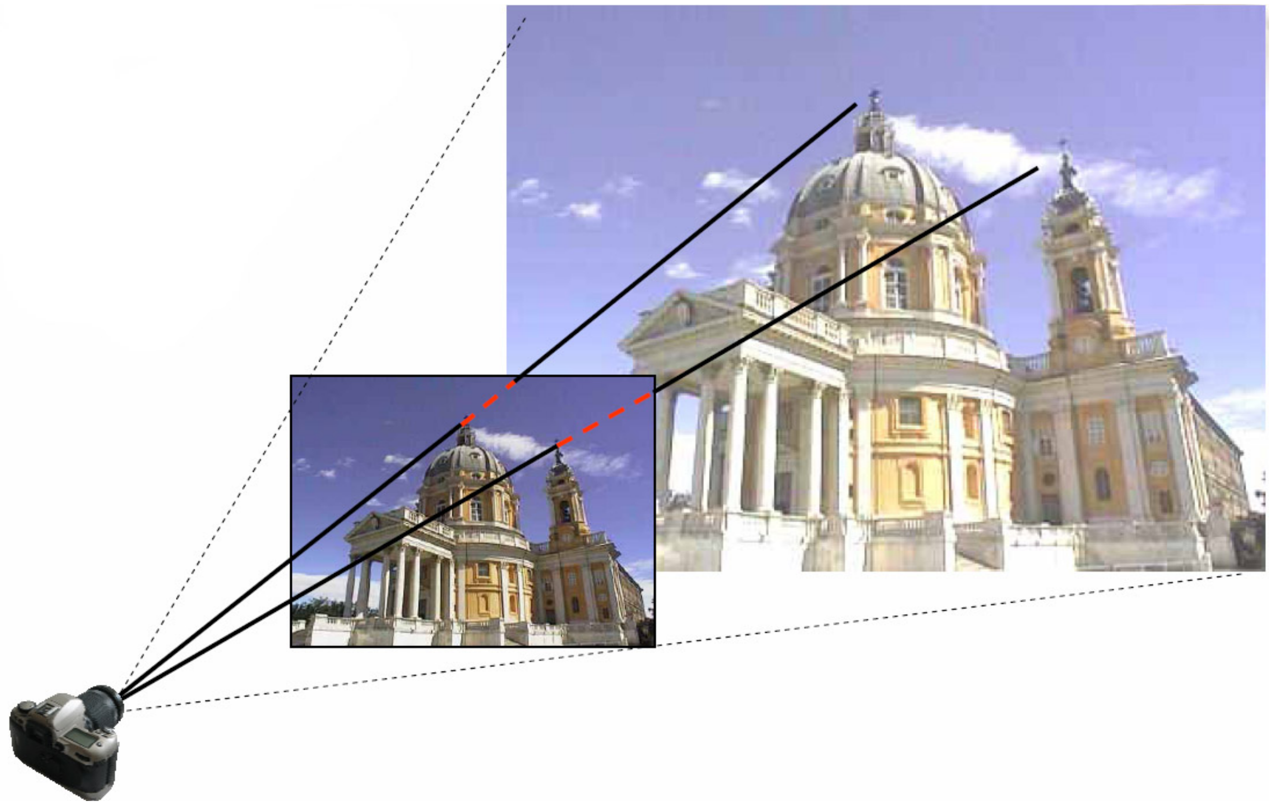
Viceversa se i punti oggetto verificano delle condizioni particolari è possibile utilizzare un solo fotogramma.



ANALOGIE FOTOGRAMMETRIA - TEODOLITE

Un fotogramma può essere pensato come uno strumento analogo ad un teodolite che offre il vantaggio di acquisire contemporaneamente un gran numero di punti…

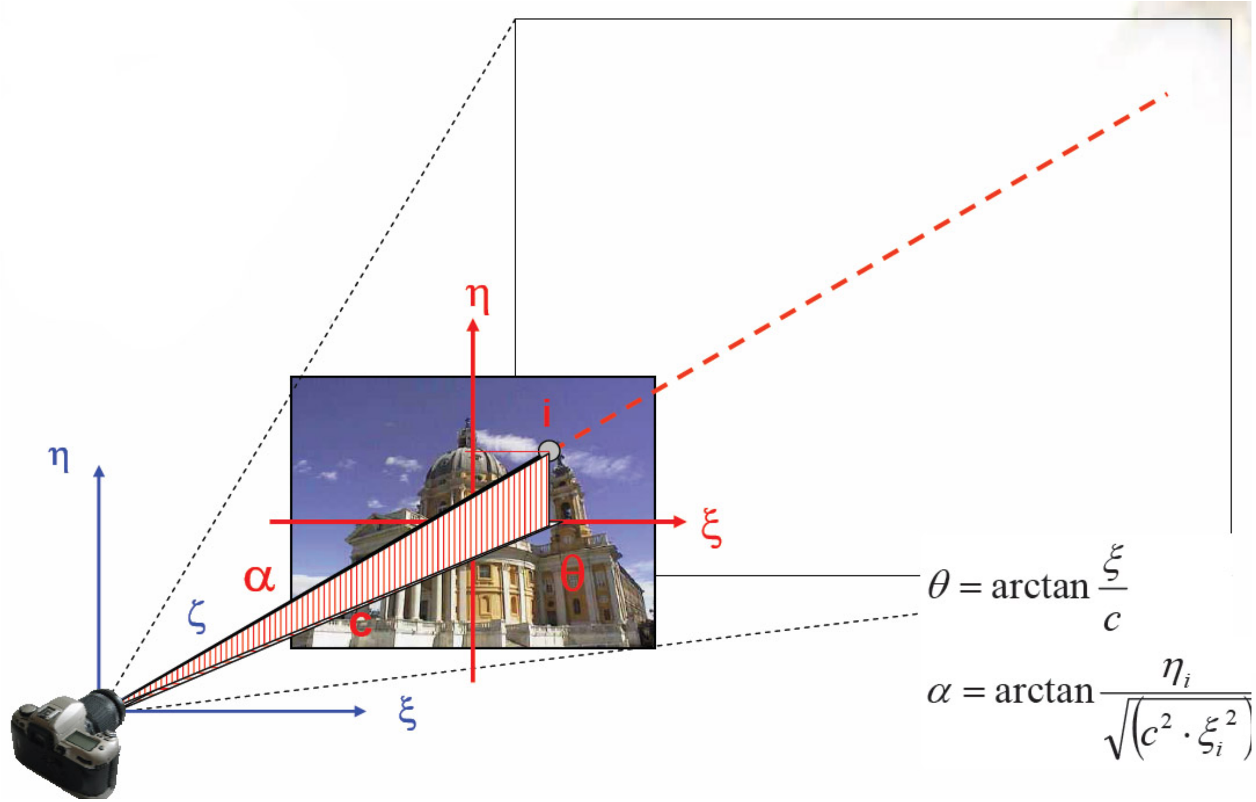
Ammettiamo che la condizione di collinearità sia verificata:



ANALOGIE FOTOGRAMMETRIA - TEODOLITE

Dalla posizione del punto immagine si può calcolare gli angoli di direzione "azimutali e zenitali" come in un teodolite…

La procedura di orientamento della "stazione" non è però la stessa…



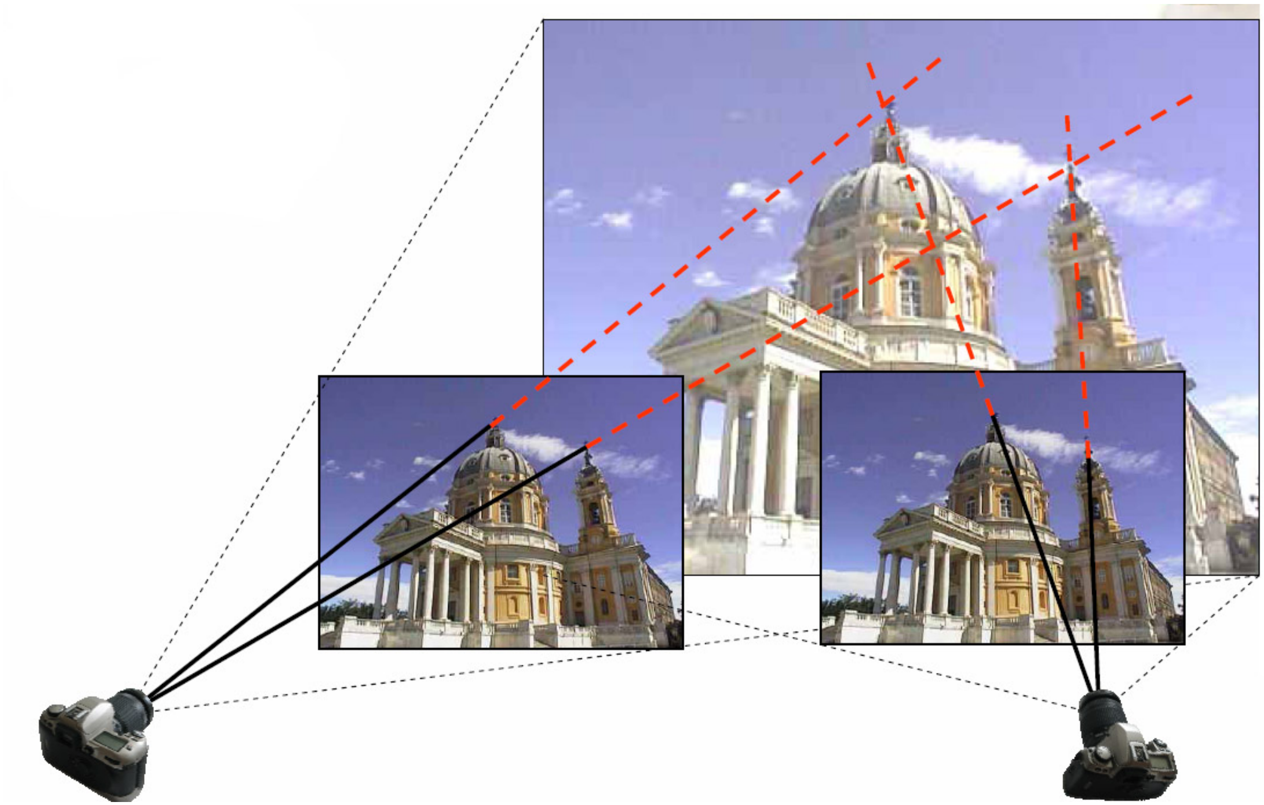
$$\theta = \arctan \frac{\xi}{c}$$

$$\alpha = \arctan \frac{\eta_i}{\sqrt{\left(c^2 \cdot \xi_i^{\,2}\right)}}$$

ANALOGIE FOTOGRAMMETRIA - TEODOLITE

Inoltre, a differenza di una stazione totale, dal singolo fotogramma non si possono ottenere informazioni di distanza:

BISOGNA PROCEDERE PER INTERSEZIONE IN AVANTI!!!



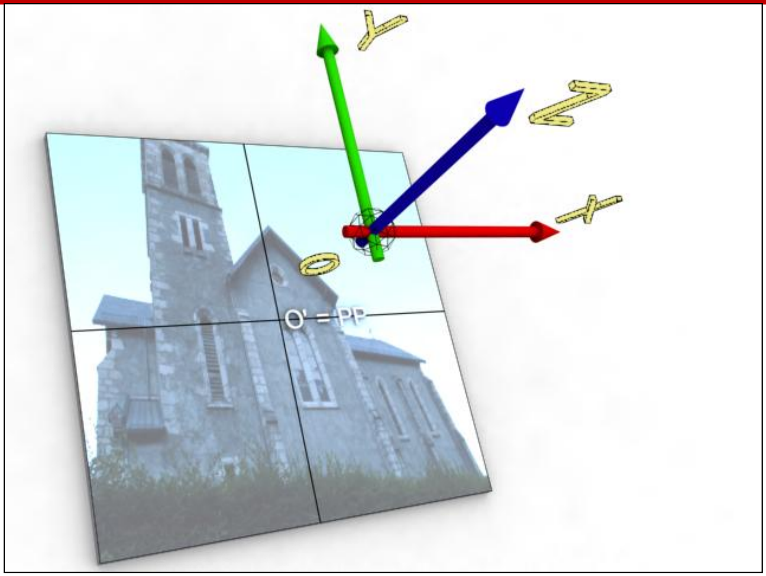
SPAZIO OGGETTO:

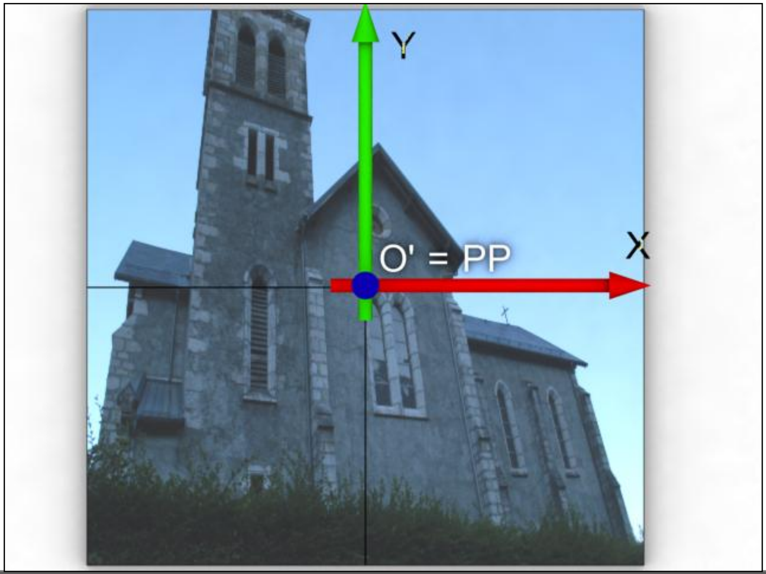
Si definisce spazio oggetto (o terreno) il sistema di riferimento contenente la scena che si vuole analizzare e il blocco fotogrammetrico (l'insieme delle successive acquisizioni di fotogrammi)

GLI SPAZI IN FOTOGRAMMETRIA

SPAZIO IMMAGINE:

Si definisce spazio immagine il <u>sistema di riferimento</u> solidale al corpo macchina rispetto al quale sono definiti tutti gli elementi interni alla fotocamera (piano immagine, etc…)



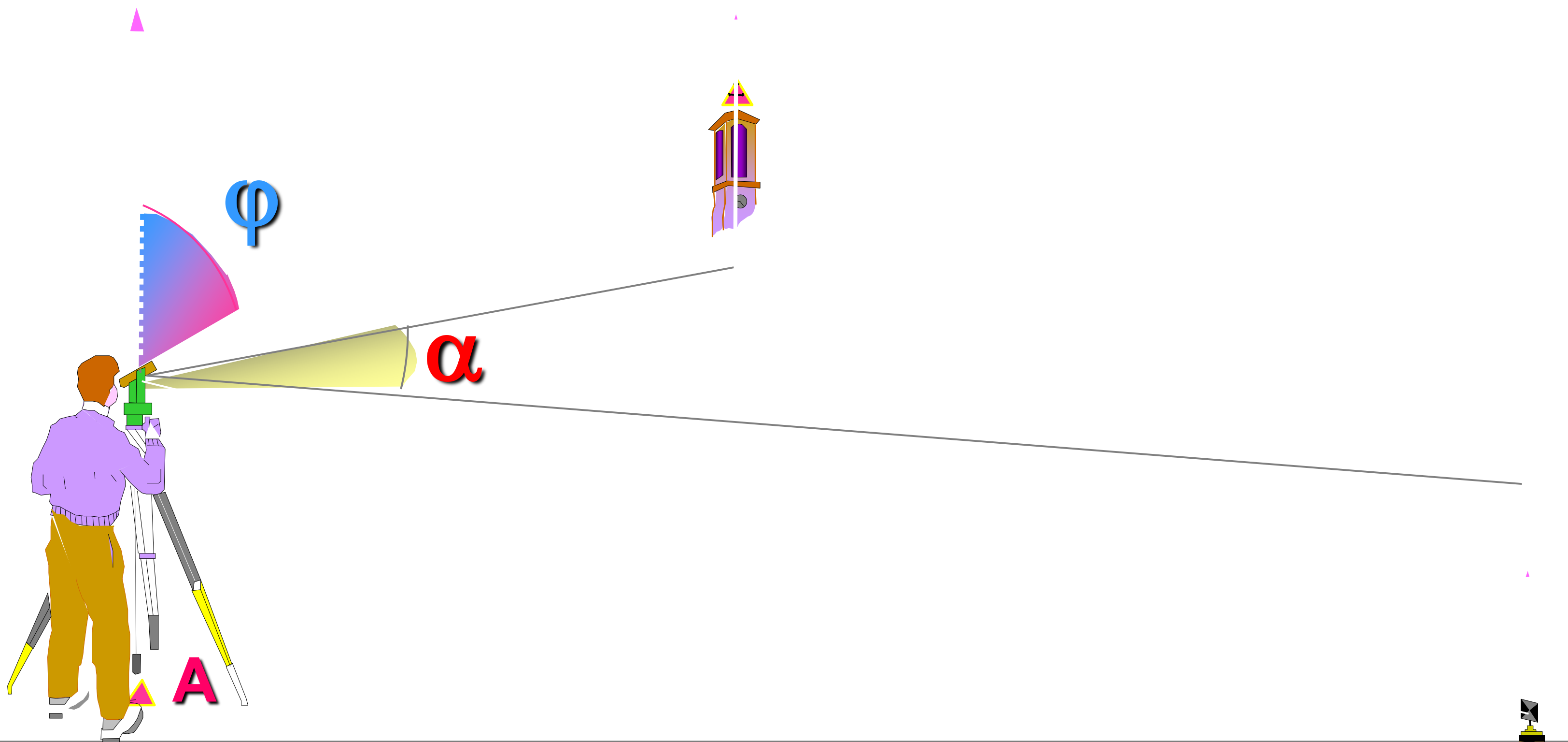


IL PROBLEMA DELL'ORIENTAMENTO

ORIENTAMENTO (ESTERNO) DI UN TEODOLITE

Un <u>teodolite</u> ha 4 gradi di libertà:

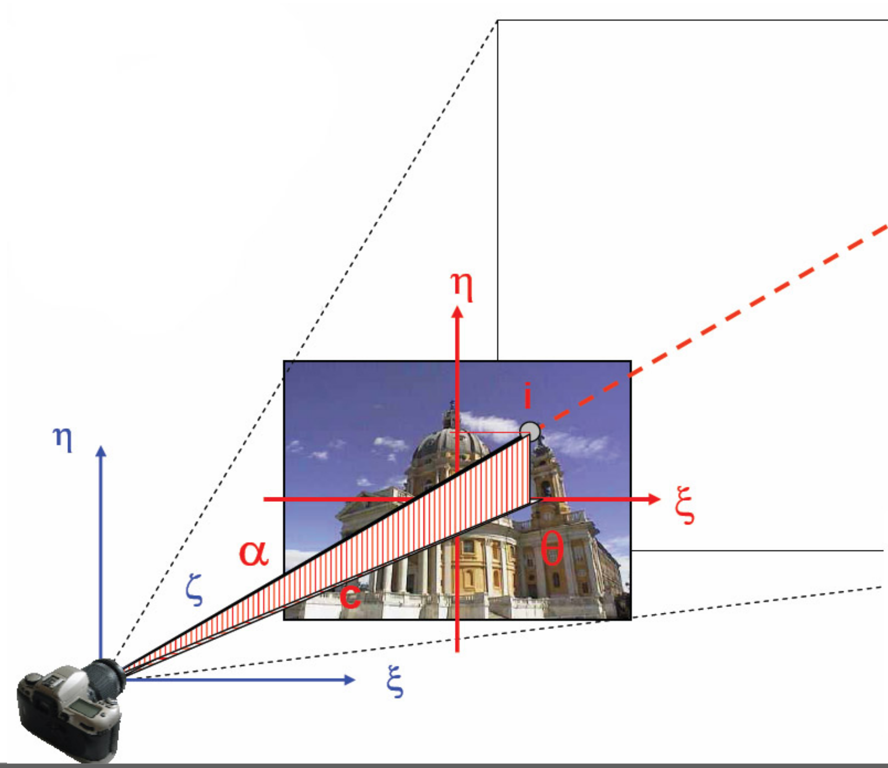
- 3 GdL Traslazionali: Posizione della stazione in X, Y e Z;
- 1 GdL Rotazionale: Direzione 0 del cerchio orizzontale;



ORIENTAMENTO (ESTERNO) DI UN FOTOGRAMMA

Un <u>fotogramma</u> ha 6 gradi di libertà:

- 3 GdL Traslazionali: Posizione della stazione in X, Y e Z;
- 3 GdL Rotazionali: Direzione dell’asse ottico della camera;



$$\theta = \arctan\frac{\xi}{c}$$

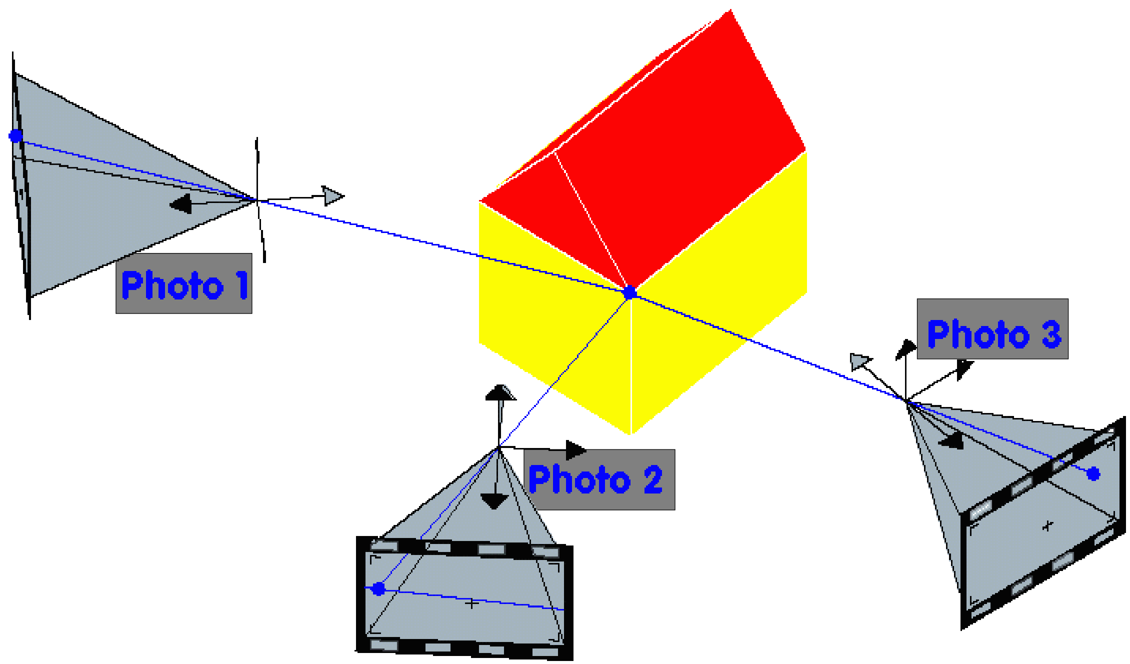
$$\alpha = \arctan\frac{\eta_i}{\sqrt{\left(c^2 \cdot \xi_i^2\right)}}$$

IL PROBLEMA DELL'ORIENTAMENTO

Una volta orientati i fotogrammi la restituzione avviene (solitamente) per intersezione in avanti.

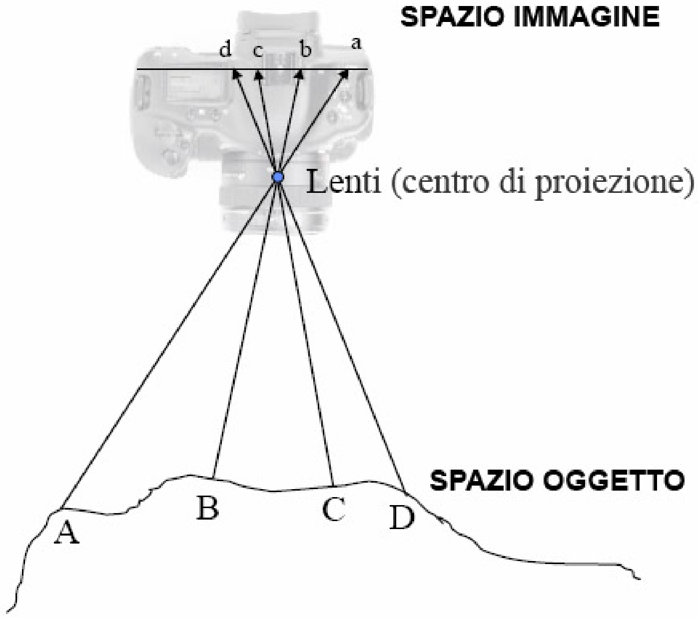
Come per una rete topografica gli orientamenti possono essere stimati durante la compensazione a minimi quadrati.

(N.B.: VALORI APPROSSIMATI)



IL PROCESSO FOTOGRAMMETRICO

Le equazioni di collinearità, in quest'ottica, possono essere assimilate alle equazioni di osservazione di una rete plano-altimetrica rilevata con un teodolite.



SCHEMA DELLE OPERAZIONI:

1. Progettazione della rete (blocco)
2. Realizzazione delle prese;
3. Orientamento dei fotogrammi;
4. Restituzione.

IL PROCESSO FOTOGRAMMETRICO

Le equazioni di collinearità sono una schematizzazione della realtà e non sono pertanto strettamente verificate:

NELLO SPAZIO OGGETTO:

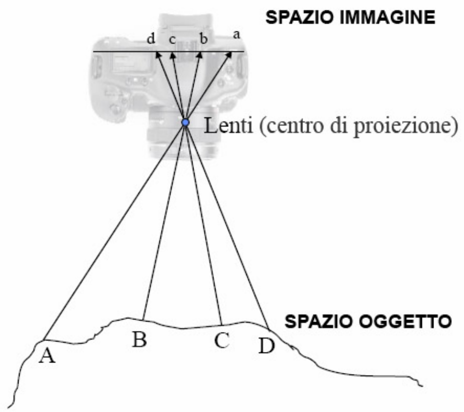
Il raggio di proiezione non è detto che si propaghi nell'aria seguendo una traiettoria rettilinea (rifrazione atmosferica)

ATTRAVERSO IL CORPO OTTICO (LENTI):

Il raggio subisce delle deviazioni dovute alla rifrazione attraverso le lenti

SUL "PIANO" IMMAGINE:

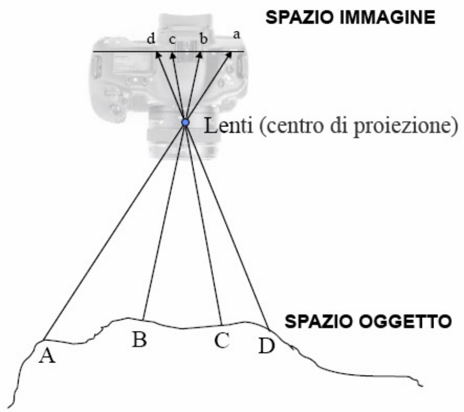
La superficie sulla quale viene registrata l'informazione (pellicola o sensore digitale) può non essere piana o subire delle deformazioni.



IL PROCESSO FOTOGRAMMETRICO

Le equazioni di collinearità sono una schematizzazione della realtà e non sono pertanto strettamente verificate:

Il nostro scopo è quantificare tutti gli errori sistematici (significativi) che rendono non valida la condizione di collinearità e cercare, per quanto possibile, di eliminarli o ridurli.



- ❑ CALIBRAZIONE

- ❑ MODELLAZIONE DEGLI EFFETTI SISTEMATICI

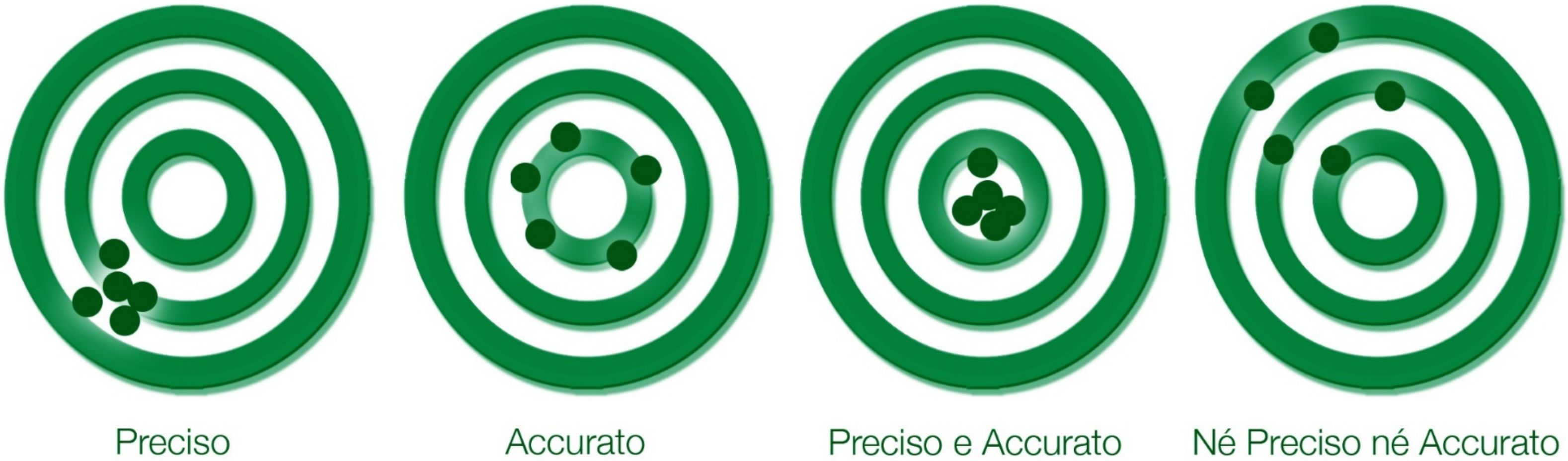
PROGRAMMA SINTETICO DEL CORSO

- I dati in Fotogrammetria e Telerilevamento
- Fotogrammetria analitica – Equazioni di collinearità
- Fotogrammetria analitica – Orientamento Interno
- Fotogrammetria analitica – Orientamento Esterno
- Prodotti della fotogrammetria
- Fotogrammetria digitale
- Laser a scansione
- Approfondimento sul Telerilevamento

Richiami teorici

BREVE POSTILLA IN MERITO AL SIGNIFICATO DI PRECISIONE, ACCURATEZZA, AFFIDABILITA':

LA SEMPLIFICAZIONE PIU' COMUNE: IL LANCIATORE DI FRECCETTE



PRECISIONE: GRADO DI CONCORDANZA FRA I RISULTATI (A PRIORI – A POSTERIORI)

ACCURATEZZA: GRADO DI CONCORDANZA FRA IL RISULTATO E IL VALORE VERO (i.e. VALORE DI RIFERIMENTO)

AFFIDABILITA': CAPACITA' DI EVIDENZIARE EVENTUALI ERRORI GROSSOLANI DI MISURA

PRINCIPALI STIMATORI:

MEDIA: $$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

VARIANZA: $$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu_x)^2$$

SQM (SCARTO QUADRATICO MEDIO): $$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu_x)^2}$$

EQM (ERRORE QUADRATICO MEDIO): $$rms = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

$$\sigma^2 = rms^2 - \mu^2$$

Richiami teorici

METODI DI STIMA A MINIMI QUADRATI:

CASO LINEARE

MODELLO DETERMINISTICO

$$y = Ax + b$$

MODELLO STOCASTICO

DATA C_{yy} = matrice varianza-covarianza delle osservabili y

$$(Y_0 - y)^T C_{yy}^{-1} (Y_0 - y) = \min$$

METODI DI STIMA A MINIMI QUADRATI:

CASO NON-LINEARE

MODELLO DETERMINISTICO

$$y = g(x)$$

$$y = g(x_0) + \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i}\bigg|_{x=x_0} \cdot dx_i + o\left(dx^2\right) = Jdx + b$$

MODELLO STOCASTICO

$$(Y_0 - y)^T C_{yy}^{-1} (Y_0 - y) = \min$$

Richiami teorici

METODI DI STIMA A MINIMI QUADRATI:

SOLUZIONE

PARAMETRI:

$$x = \left(A^T C_{yy}^{-1} A\right)^{-1} A^T C_{yy}^{-1} (Y_0 - b)$$

VARIANZE:

$$C_{xx} = \sigma_0^2 \left(A^T C_{yy}^{-1} A\right)^{-1} = \sigma_0^2 N^{-1}$$

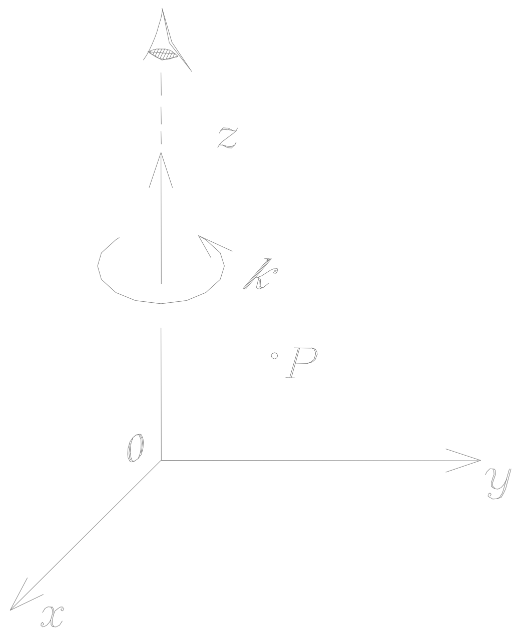
$$\sigma_0^2 = \frac{v^T C_{yy}^{-1} v}{n - m}$$

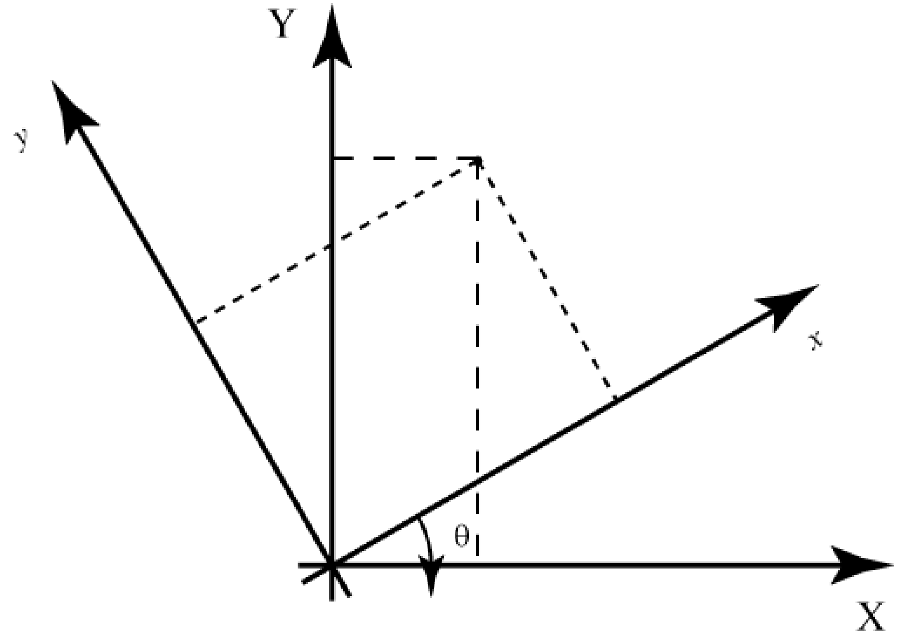
$$C_{vv} = \sigma_0^2 \left(C_{yy} - A N^{-1} A^T\right)$$

$$C_{yy} = \sigma_0^2 A N^{-1} A^T$$

ROTAZIONI NEL PIANO

Una generica rotazione nello spazio 3D può essere sempre scomposta univocamente in tre rotazioni piane attorno a tre assi mutualmente ortogonali:



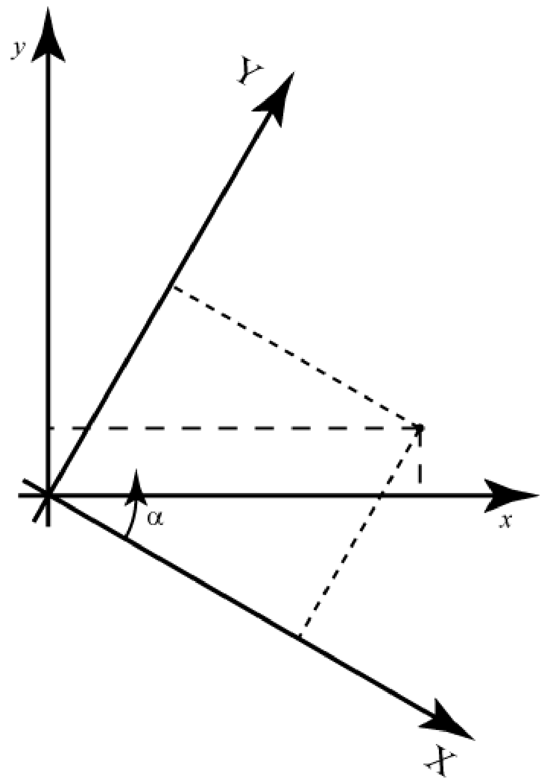


$$\begin{cases} X = x\cos\theta - y\sin\theta \\ Y = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

ROTAZIONI NEL PIANO

Per la trasformazione inversa otteniamo:



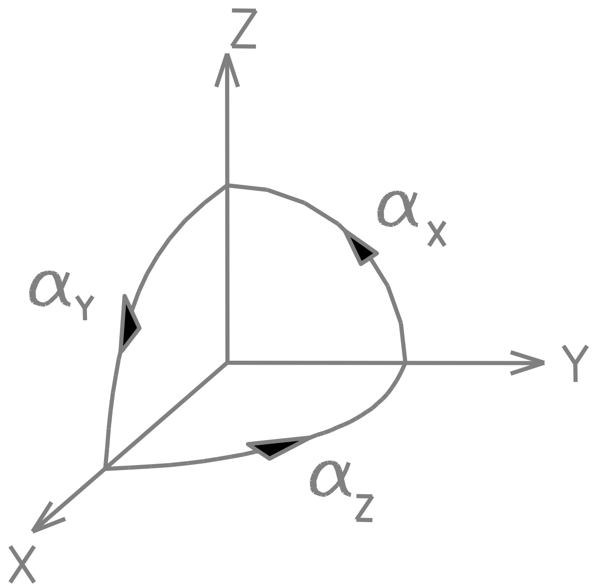
$$\begin{cases} x = X\cos\alpha + Y\sin\alpha \\ y = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix}$$

E' FACILE OSSERVARE CHE LA MATRICE DI ROTAZIONE DA OXY A Oxy E' LA TRASPOSTA DI QUELLA DA Oxy a OXY:

ROTAZIONI NELLO SPAZIO

Una generica rotazione nello spazio 3d può essere sempre scomposta univocamente in tre rotazioni piane attorno a tre assi mutualmente ortogonali:



CONVENZIONI SUGLI ANGOLI:

- Una rotazione generica nello spazio può essere definita per mezzo di
    - ANGOLI CARDANICI
    - ANGOLI EULERIANI
- In fotogrammetria si considerano positivi gli angoli presi in senso antiorario

ANGOLI EULERIANI

Un primo metodo per definire la rotazione necessaria per portare a coincidere un sistema oxyz su un altro OXYZ deriva dall'applicazione dei coseni direttori:

$$R = \left|\begin{matrix} \cos(xX) & \cos(xY) & \cos(xZ) \\ \cos(yX) & \cos(yY) & \cos(yZ) \\ \cos(zX) & \cos(zY) & \cos(zZ) \end{matrix}\right|$$

$$\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right| = R \cdot \left|\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}\right|$$

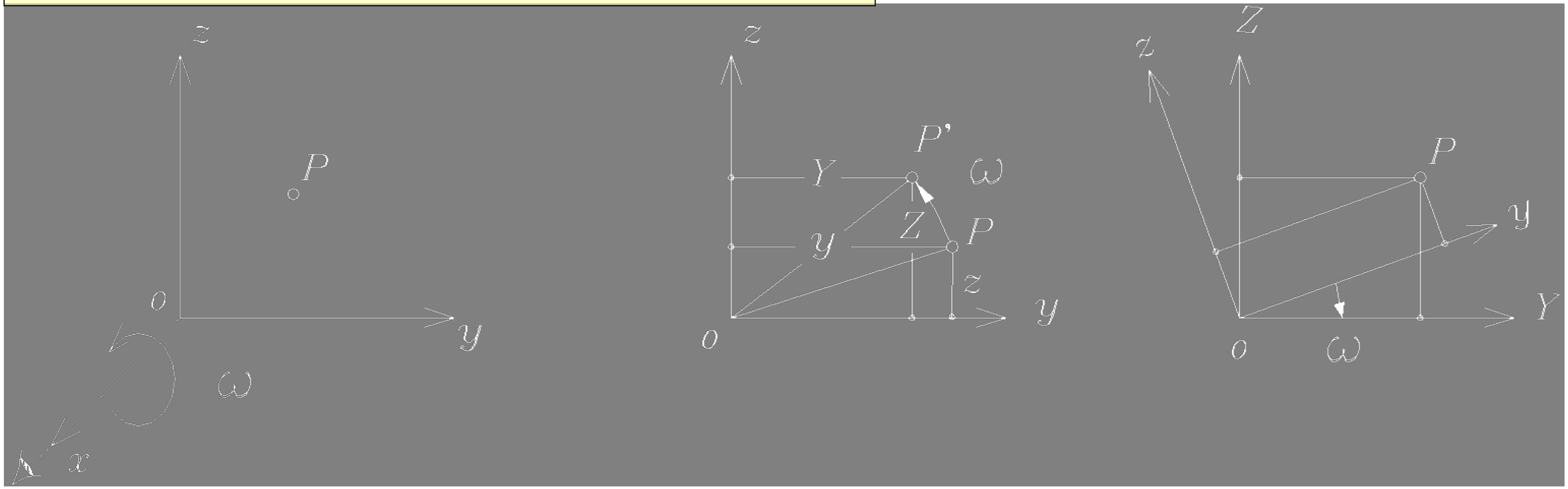
PROBLEMI:

1. Non sempre è facile determinare i coseni direttori (angolo formato fra i vari assi)!!!
2. Ho 9 parametri di cui 6 dipendenti (sovra-parametrizzato)

ANGOLI CARDANICI

Per risolvere il problema possiamo allora considerare l'applicazione di tre rotazioni indipendenti in sequenza da effettuarsi ogni volta attorno ad un differente asse del sistema primario (di partenza):

1. ROTAZIONE ATTORNO AD X (rot. ω):

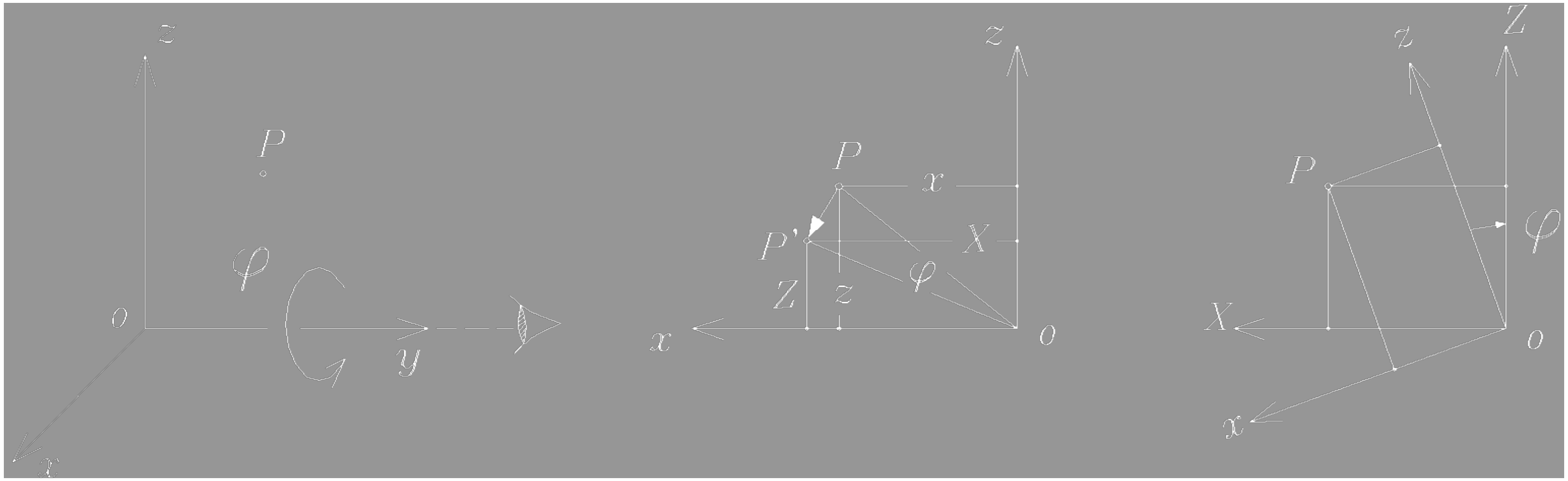


$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$$

ANGOLI CARDANICI

Per risolvere il problema possiamo allora considerare l'applicazione di tre rotazioni indipendenti in sequenza da effettuarsi ogni volta attorno ad un differente asse del sistema primario (di partenza):

2. ROTAZIONE ATTORNO AD Y (rot. ϕ):

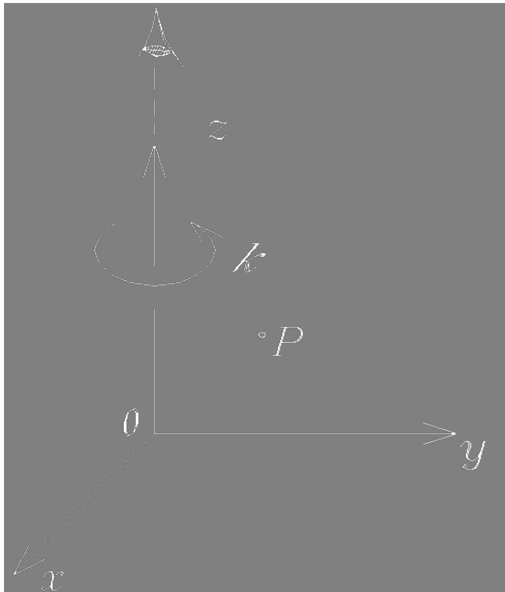


$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$$

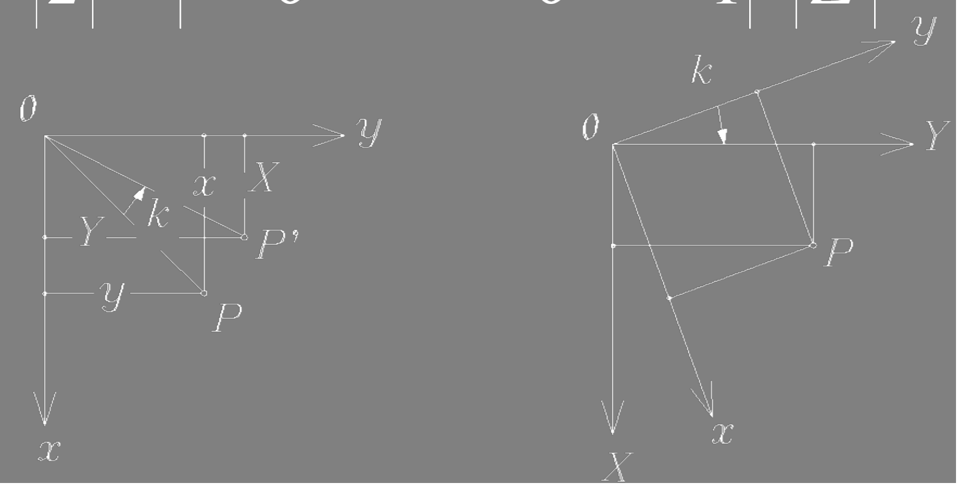
ANGOLI CARDANICI

Per risolvere il problema possiamo allora considerare l'applicazione di tre rotazioni indipendenti in sequenza da effettuarsi ogni volta attorno ad un differente asse del sistema primario (di partenza):

3. ROTAZIONE ATTORNO A Z (rot. κ):



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa & 0 \\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$



ANGOLI CARDANICI

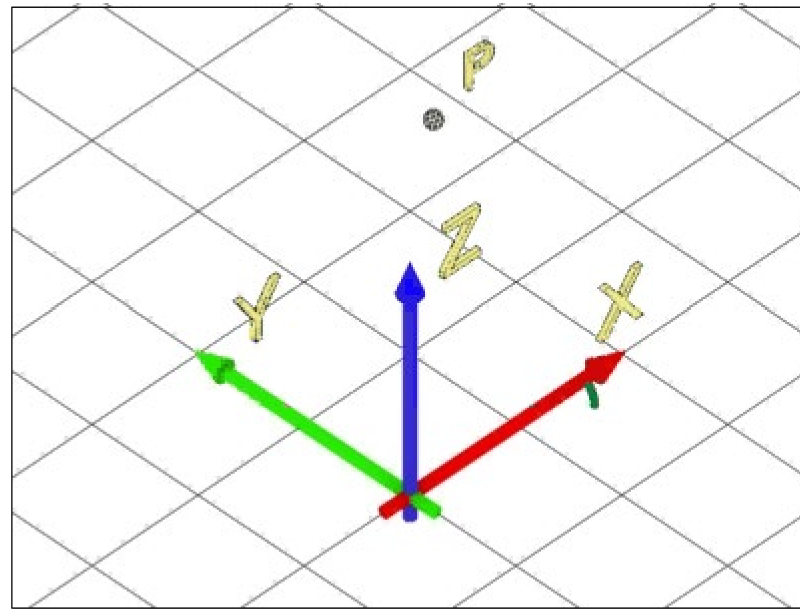
Riassumendo:

Dato un punto P di coordinate (x y z)…

1. ROTAZIONE ATTORNO AD X (rot. ω):

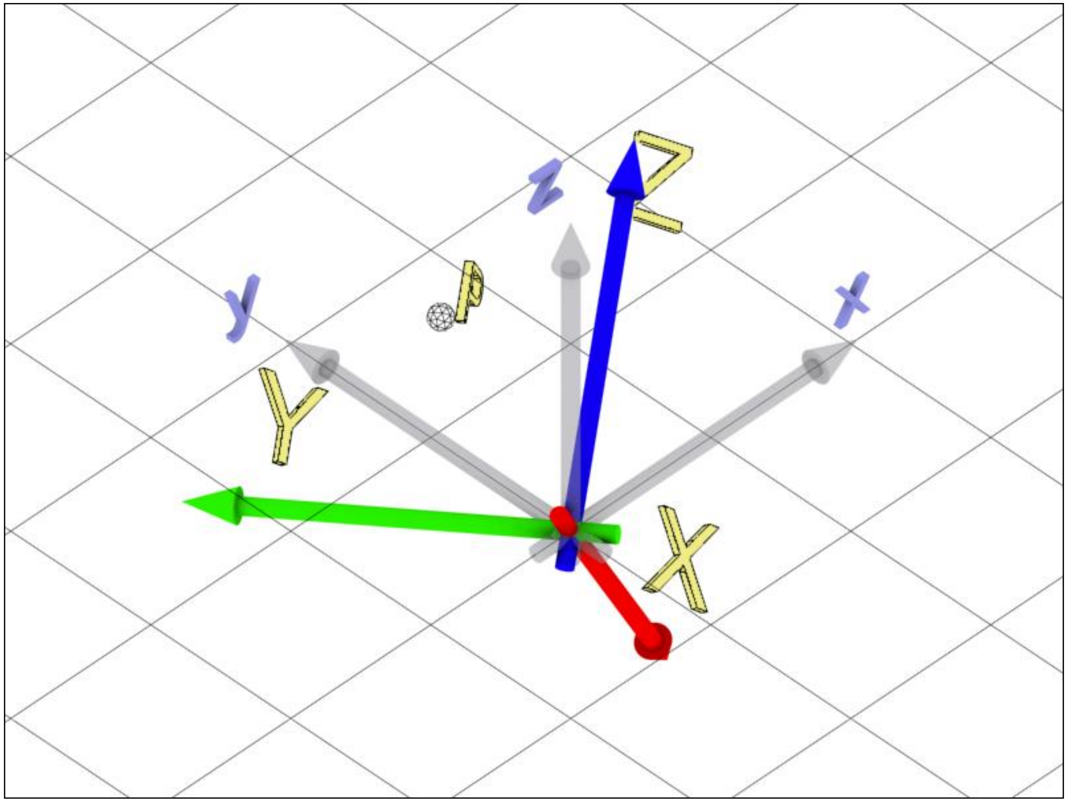
2. ROTAZIONE ATTORNO AD Y (rot. ϕ):

3. ROTAZIONE ATTORNO A Z (rot. κ):



$$\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} = R \cdot \begin{vmatrix}X\\Y\\Z\end{vmatrix} \qquad R = R_\kappa \cdot R_\phi \cdot R_\varpi \qquad \begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} = R_\kappa \cdot R_\phi \cdot R_\varpi \cdot \begin{vmatrix}X\\Y\\Z\end{vmatrix}$$

ANGOLI CARDANICI



$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = R \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} \qquad R = R_{\kappa} \cdot R_{\phi} \cdot R_{\varpi}$$

NB: R è la rotazione per portare il sistema xyz sul nuovo sistema XYZ

ANGOLI CARDANICI

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = R \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} \qquad R = R_{\kappa} \cdot R_{\phi} \cdot R_{\varpi}$$

SOSTITUENDO:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa & 0 \\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \cos\phi\cos\kappa & \cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\phi\cos\kappa & \sin\omega\sin\kappa - \cos\omega\sin\phi\cos\kappa \\ -\cos\phi\sin\kappa & \cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\phi\sin\kappa & \sin\omega\cos\kappa + \cos\omega\sin\phi\sin\kappa \\ \sin\phi & -\sin\omega\cos\phi & \cos\omega\cos\phi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$$

ANGOLI CARDANICI

$$\begin{vmatrix} \cos\phi\cos\kappa & \cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\phi\cos\kappa & \sin\omega\sin\kappa - \cos\omega\sin\phi\cos\kappa \\ -\cos\phi\sin\kappa & \cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\phi\sin\kappa & \sin\omega\cos\kappa + \cos\omega\sin\phi\sin\kappa \\ \sin\phi & -\sin\omega\cos\phi & \cos\omega\cos\phi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$$

$$= R_{\kappa\phi\omega} \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$$

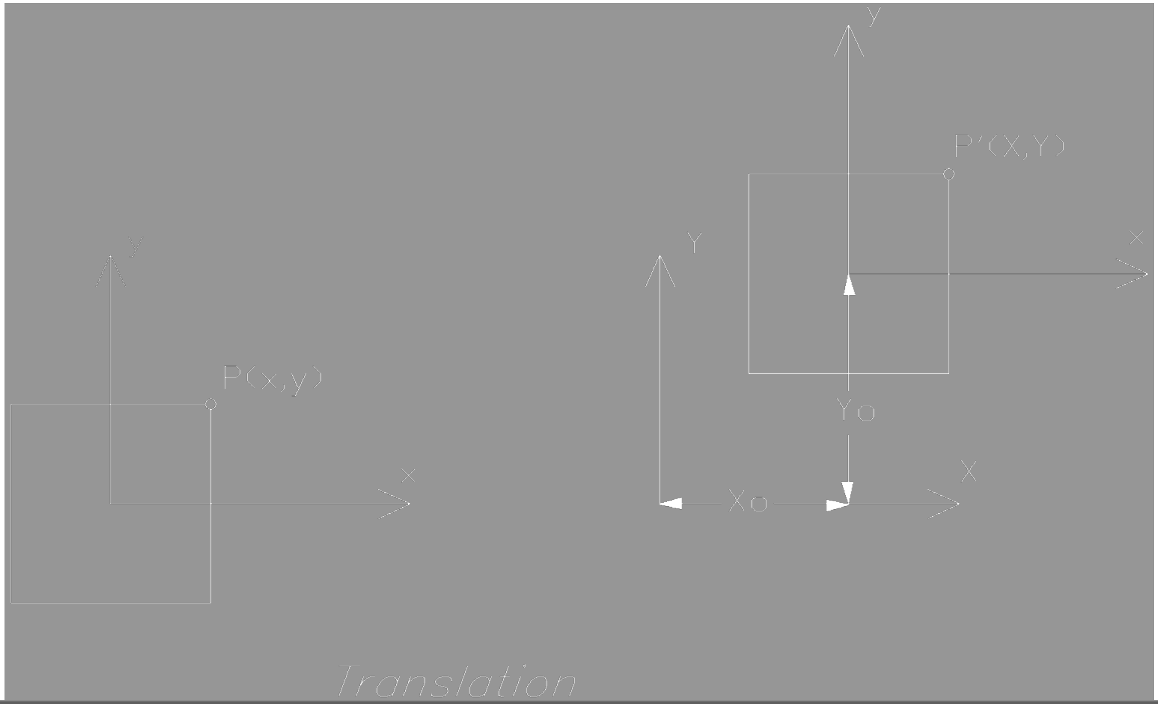
$$\phi = \arcsin \quad r_{31}$$
$$\kappa = \arctan(-r_{21}/r_{11})$$
$$\omega = \arctan(-r_{32}/r_{33})$$

TRASFORMAZIONE DI HELMERT

Consideriamo adesso altri due tipi di trasformazione:

1. TRASLAZIONE:

$$\begin{cases} x = X + X_0 \\ y = Y + Y_0 \\ z = Z + Z_0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{X_0}$$

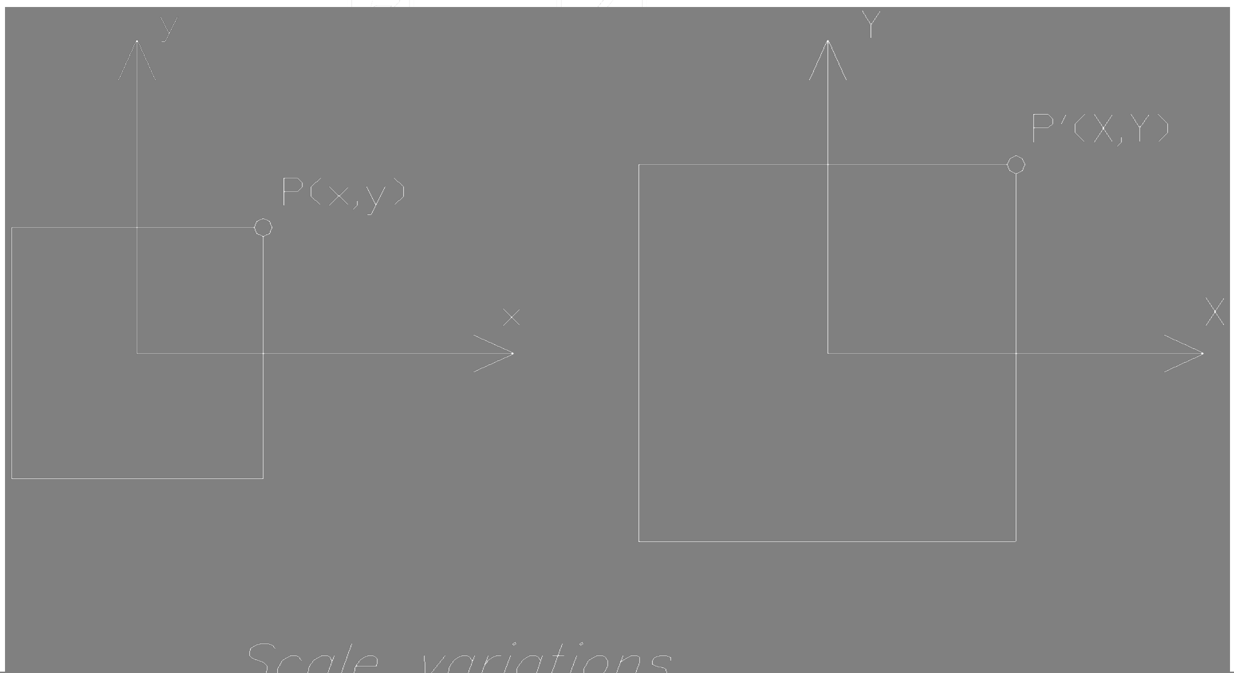


TRASFORMAZIONE DI HELMERT

Consideriamo adesso altri due tipi di trasformazione:

2. VARIAZIONE DI SCALA:

$$\begin{cases} x = \lambda X \\ y = \lambda Y \\ z = \lambda Z \end{cases} \qquad \left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right| = \lambda \left|\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}\right| \qquad \mathbf{x} = \lambda \mathbf{X}$$



TRASFORMAZIONE DI HELMERT

Sovrapponendo gli effetti di ciascuna trasformazione otteniamo una trasformazione conforme (o di Helmert).

1. ROTAZIONE: $\mathbf{x} = R \cdot \mathbf{X}$

2. VARIAZIONE DI SCALA: $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{X}$

3. TRASLAZIONE: $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{X_0}$

$$\mathbf{x} = \lambda R(\varpi, \phi, \kappa) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X_0}$$